同调与同伦原理

TONGDIAO YU TONGLUN YUANLI

黄 保 军



中国科学技术大学出版社

责任编辑／于文良
封面设计／刘俊霞

ISBN 7-312-01770-3/O·301
定价：15.00元

同调与同伦原理

黄 保 军

中国科学技术大学出版社

2005 · 合肥

内 容 简 介

本书是作者在代数拓扑选修课讲义的基础上，经仔细整理、增删和润色而成的。全书共分八章。第 0 章是对一般拓扑学基本理论的简要回顾，第 1、2 两章介绍单纯同调论，第 3 章是曲面的拓扑分类的经典理论，第 4、5 章是同伦论基础，整个第 6 章将介绍在一般拓扑空间上的奇异同调论，最后一章是上同调论的一个概要。

本书论述严谨，直观通俗，便于读者从几何的角度去理解抽象的拓扑思想，适合高校数学系高年级学生和研究生选作教材或自学。

图书在版编目(CIP)数据

同调与同伦原理/黄保军. —合肥：中国科学技术大学出版社，2005.2

ISBN 7-312-01770-3

Ⅰ. 同… Ⅱ. 黄… Ⅲ. ①同调论—高等学校—教材 ②同伦论—高等学校—教材 Ⅳ. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 010356 号

中国科学技术大学出版社 出版发行

(安徽省合肥市金寨路 96 号，邮政编码：230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本：850×1168/32　印张：6.875 字数：170 千

2005 年 2 月第 1 版　2005 年 2 月第 1 次印刷

印数：1—1500 册

ISBN 7-312-01770-3/O·301　定价：15.00 元

前　　言

这本书是在为大学高年级学生开设《代数拓扑》选修课的基础上，对讲稿进行精心加工、整理而成的。它含盖了同伦、同调与上同调理论的基本内容，对于有意进入拓扑学、微分几何、Lie 群论与同调代数领域进行研究者，这些内容是必须的，而对其他读者，这本书的内容也将为代数、实、复分析提供一个直观的几何背景。所以，它不但适合大学数学专业高年级学生作为选修课教材，也是数学各专业研究生理想的代数拓扑参考书。

考虑到大学高年级学生选修课的需要，本书以一般拓扑学复习，作为开头一章(研究生阅读，可以跳过它)。第 1、2 两章是关于单纯同调论的基本内容，主要介绍复形、单纯映射和单纯同调群等理论，它们将为第 6 章奇异同调论的学习，作适当“热身”，并为学习第 3 章曲面的拓扑分类，打下一定的基础。由于整个同伦论相对艰深，且照顾到各研究方向之需要，第 4、5 两章，仅介绍了基本群和覆盖空间等一些最基本的同伦论知识，欲对其作深入了解者，可参看其他的同伦论专门书。作为同调论的进一步延伸，在第 6 章，我们以较大篇幅为深究同调论的读者，提供了奇异同调论的基本内容。本章内容虽能独立成篇，但若在学习过程中，多与单纯同调论联系和比较，将会收到更好的学习效果。上同调由于在形式上看似同调的对偶，它早期并未受到拓扑学家的重视。但因其有比同调更丰富的代数结构，现在已变得在理论上是重要的，而且在实践中也是有用的。最后一章我们将把上同调论的一个概要呈献给读者，希望为有意继续深入学习、钻研上同调论的同志，提供一些方便。

对每一本书来说，习题的作用是不容忽视的。为照顾到各专

业方向读者的需求，本书每节后的习题，作者都力求让它们形成一个梯度。首先是“基本题”，主要用以帮助读者加深理解正文内容，熟练解决问题的基本方法；其次是“伏笔题”，一方面为以后的定理或习题提供依据，另一方面是对某些知识的研习，先进行一定的训练，以便对以后问题的提出及论证，能更容易理解和接受；最后是“加深题”，为的是在不影响篇幅的情况下，通过将一些定理及其证明，有机地编为习题，来拓宽和加深读者对相关知识的理解和掌握。读者在独立完成一定数量的习题之后，不论是对正文的理解，还是对有关问题的看法，都会有“另有天地”之感。

本书所包含的内容，可以说是代数拓扑学最基本的知识，绝大部分在国内同类著作中都可找到，如果说作者作了点什么工作的话，也仅仅是在取材与表述方面。这里有一点需要特别提及的是，书的前 6 章建立在作者早几年所编讲义的基础之上，但后 2 章多处参考了作者在北京大学师从姜伯驹院士研究拓扑学时，所记录的他为研究生开设的《同调论》课堂笔记，其中不乏有他对某些经典问题的巧妙处理方法。另外，作者能有幸走上代数拓扑研究之路，也得益于姜老师的谆谆教诲，在此，谨表示衷心感谢！

编著者

2004 年 12 月

目　　录

第 0 章　一般拓扑学复习

一般拓扑学又称点集拓扑学，尽管其研究的是 Euclid 空间或拓扑空间中一般点集的拓扑性质，但其有关内容仍不失为代数拓扑学的必备基础. 为不冲淡主题，本章只打算对一般拓扑学的有关重点理论，作一简要复习和回顾，以后各章所需要的一般拓扑学的其它知识，读者可查阅参考文献[5]或[6].

0.1　拓扑空间

0.1.1 定义　设 X 为一非空集合，且设 $\mathscr{U}$ 是 X 的一子集簇，若满足：

(1) $\varnothing\in\mathscr{U}, X\in\mathscr{U}$；

(2) $\mathscr{U}$ 的任二成员的交在 $\mathscr{U}$ 中；

(3) $\mathscr{U}$ 的任意多个成员的并亦在 $\mathscr{U}$ 中.

则称子集簇 $\mathscr{U}$ 为 X 的**拓扑**. 集 X 与 $\mathscr{U}$ 一起称为**拓扑空间**，且用 $(X,\mathscr{U})$ 表示，还常简记为 T 或 X，成员 $U\in\mathscr{U}$ 称为 T 的**开集**，X 的元素称为 T 的**点**.

注意 条件(1)蕴含着 $\mathscr{U}$ 的有限个成员之交仍在 $\mathscr{U}$ 中. 若 $\varphi(X)$ 表示 X 的所有子集之集，则 X 的拓扑乃是满足上述条件(1)—(3)的 $\mathscr{U}\subset\varphi(X)$ 的一个选择，不同的选择给出 X 的不同拓扑.

有很多拓扑空间的例子是重要的. 考虑满足拓扑空间条件的 X 的可能子集簇的极端情形，我们给出下面两个例子：第一个例子是令 $\mathscr{U}=\{\varnothing, X\}$，这显然给出了关于任意集 X 的一个拓扑，称为 X 的**平庸拓扑**. 另一极端情形是令 $\mathscr{U}$ 为 X 的所有子集之集 φ

(X)，这也给出了 X 的一个拓扑，称为 X 的**离散拓扑**.

关于 X 的拓扑的一个有趣例子是著名的**有限余拓扑**，这里 $\mathscr{U}$ 由 $\varnothing$，X 以及 X 的具有有限余的子集组成. 首先，若 X 本身是有限集，这正是 X 的离散拓扑；若 X 为无限集，我们需验证子集族 $\mathscr{U}$ 满足关于拓扑的三个条件. 第一条自然满足；关于第二条，假设 $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$，则 $X\backslash U_1$，$X\backslash U_2$ 为有限集，这样 $(X\backslash U_1)\cup(X\backslash U_2)$ 有限，即 $X\backslash(U_1\cap U_2)$ 有限，从而 $U_1\cap U_2\in\mathscr{U}$；关于第三条，只需利用公式 $X\backslash(\bigcup_{j\in J}U_j)=\bigcap_{j\in J}(X\backslash U_j)$ 即可验证.

0.1.2 定义 拓扑空间 X 的子集 C 称为**闭集**，当且仅当 $X\backslash C$ 为开集. 利用集合论中并和交的余的结果易证下面的结论：

0.1.3 定理 (1) $\varnothing$，X 为闭集；

(2) 任二闭集之并仍为闭集；

(3) 任意多个闭集的交仍是闭集.

注 闭集的概念也可用来定义拓扑空间.

对于拓扑空间 X 的任意子集 Y，我们可以考虑包含 Y 的最小闭集，该集用 $\overline{Y}$ 表示，且称其为 Y 的**闭包**，记成

$$\overline{Y}=\bigcap_{j\in J}F_j$$

其中 $\{F_j, j\in J\}$ 为包含 Y 的所有闭集之簇. 在 $\overline{Y}$ 中而不在 Y 中的点称作 Y 的**极限点**. 可以证明

0.1.4 引理 $x\in\overline{Y}\Leftrightarrow$ 对包含 x 的任意开集 U，$U\cap Y\neq\varnothing$.

事实上，设 $x\in\overline{Y}$，且假设 $\exists$ 一包含 x 的开集 U，使 $U\cap Y=\varnothing$，从而 $X\backslash U$ 为闭集且 $Y\subset X\backslash U$，所以 $\overline{Y}\subset X\backslash U$，这显然是一个矛盾. 反之，假设 $x\notin\overline{Y}$，从而 $x\in X\backslash\overline{Y}$，但 $X\backslash\overline{Y}$ 为开集，且 $(X\backslash\overline{Y})\cap\overline{Y}=\varnothing$，矛盾.

例如，若考虑具有通常拓扑的 $\mathbf{R}$，则集 (a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$，

$[a,b]$的闭包都是$[a,b]$.

0.1.5 定义 设 X 为拓扑空间,若 $x\in N\subset X$,则 N 称为 x 的**邻域**,当且仅当∃一开集 U,满足 $x\in U\subset N$. 持别地,开集自身是它的每一点的邻域. 更一般地 ,集 $A(A\neq\varnothing)$是它的内部的每一点的邻域.

习　题

1. 设 $X=\{x,y,z\}$,试问 X 的下列子集簇是不是拓扑? 若不是,请添加最少的子集,使其成为拓扑.

(1) $\{X,\varnothing,\{x\},\{y,z\}\}$;

(2) $\{X,\varnothing,\{x,y\},\{x,z\}\}$;

(3) $\{X,\varnothing,\{x,y\},\{y,z\},\{z,x\}\}$.

2. 设 $\mathscr{U}$是 X 上的拓扑,A 是 X 的子集,定义

$$\mathscr{U}' = \{A \cup U \mid U \in \mathscr{U}\} \cup \{\varnothing\}$$

求证 $\mathscr{U}'$亦是 X 上的拓扑.

3. 设 A 是函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ $x\in(0,1)$的图像,求 $\overline{A}=$?

4. 设 $A_i\subset X$ 闭,$i=1,2,\cdots,n$,且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=X$,求证 $B\subset X$ 是闭的$\Leftrightarrow$对∀ $i=1,2,\cdots,n$,$B\cap A_i$ 是 A_i 的闭集.

0.2 连续映射

0.2.1 定义 两个拓扑空间之间的一映射 $f: X\to Y$ 称为**连续的**,若对 Y 的每一开集 V,逆像 $f^{-1}(V)$为 X 的开集.

连续映射最常见的例子是**恒等映射** $I_X: X\to X$ 和**常值映射**

$c: X \to Y$，即 X 的任一点对应于 Y 的某固定点.

如果我们让空间 X 带有离散拓扑，则从 X 到任意拓扑空间 Y 的任一映射 $f: X \to Y$ 都是连续的. 再者，如果让 Y 带有平庸拓扑，则易看出，从任一拓扑空间 X 到 Y 的任一映射 $f: X \to Y$ 也是连续的.

不连续映射的例子也是有的. 例如，设 $X=(\boldsymbol{R}, \mathscr{U})$，其中 $\mathscr{U}=\{\varnothing\} \cup\{\boldsymbol{R}\} \cup\{(-\infty, x) ; x \in \boldsymbol{R}\}$，设 $f: X \to X$ 由 $f(x)=x^2$ 确定，则映射 f 是不连续的，因为 $f^{-1}((-\infty, y^2))=(-y, y)$，它不属于 $\mathscr{U}$.

0.2.2 定理 映射 $f: X \to Y$ 连续 $\Leftrightarrow$ 对 Y 的每一闭集 C，$f^{-1}(C)$ 为 X 的闭集.

证明 假设 f 连续，若 C 为闭集，则 $Y \backslash C$ 为开集，从而 $f^{-1}(Y \backslash C)$ 为开集，但 $f^{-1}(Y \backslash C)=X \backslash f^{-1}(C)$，从而 $f^{-1}(C)$ 是闭的. 反之，假设 U 是 Y 的开集，从而 $Y \backslash U$ 是闭的，所以 $f^{-1}(Y \backslash U)=X \backslash f^{-1}(U)$ 是闭的，即 $f^{-1}(U)$ 是开的，所以 f 连续. ■

映开集为开集的映射称为**开映射**. 开映射未必是连续的. 如设 Y 由两点组成且具有离散拓扑，而 X 是具有通常拓扑的实直线，映射 $f: X \to Y$

$$f(x)=\begin{cases}a & x \geqslant 0 \\ b & x<0\end{cases}$$

是一开映射，但不连续，因为 $f^{-1}(a)$ 不是 X 的开集. 可以证明：从任一拓扑空间到离散拓扑空间的任一映射肯定是开的.

映闭集为闭集的映射称为**闭映射**. 闭映射也未必是连续的. 事实上，上述开但不是连续映射的例子也是闭而不连续的例子. 一般地，一连续映射可以是：

(1)即不开也不闭；

(2)开但不闭；

(3)闭但不开；

(4)既开又闭.

例如我们要验证(1),只需令 X 是具有离散拓扑的集 A,Y 是具有平庸拓扑的集 A,且 $f: A \to A$ 为恒等映射. 关于(2),可考虑 $X=\{a,b\}$ 具有离散拓扑,而 $Y=\{a,b\}$ 具有拓扑 $\mathcal{U}=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$,而 $f: X \to Y$ 为常值映射:$f(x)=a, x\in X$,则 f 是开的和连续的,但不闭. 关于(3),令 $X=\{a,b\}$ 具有离散拓扑,而 $Y=\mathbf{R}$ 具有通常拓扑,则映射 $f: X\to Y$,$f(a)=0$,$f(b)=1$ 是连续的和闭的,但不开. 最后关于(4),我们可令 $X=Y$ 为任意拓扑空间,而 $f: X \to Y$ 为恒等映射.

0.2.3 定理 设 X、Y、Z 为拓扑空间,若 $f: X\to Y$,$g: Y\to Z$ 均为连续映射,则复合映射 $h=gf: X\to Z$ 也是连续的.

证明 若 U 为 Z 的开集,则 $g^{-1}(U)$ 为 Y 的开集,从而 $f^{-1}(g^{-1}(U))$ 为 X 的开集,但 $(gf)^{-1}(U)=f^{-1}(g^{-1}(U))$. ■

0.2.4 定义 设 X、Y 为拓扑空间,我们称 X 和 Y 是**同胚的**,如果∃互逆的连续映射 $f: X\to Y$,$g: Y\to X$(即 $fg=I_Y$,且 $gf=I_X$),记之为 $X\cong Y$,f 和 g 均称为 X 和 Y 间的**同胚映射**.

一个等价定义可要求映射 $f: X\to Y$ 是(1)双射,(2)连续,(3)逆 f^{-1} 亦连续. 这样 X 和 Y 间的一个同胚映射是 X 和 Y 的点和开集间的一个双射.

习　题

1. 设 $f: X\to Y$ 为映射,证明下列条件等价:

(1) f 连续;

(2) 对 $\forall A\subset X$,$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$;

(3) 对 $\forall B\subset Y$,$\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$.

2. 求证下列空间是互相同胚的:

(1) $X_1=\boldsymbol{R}^2\backslash 0$;

(2) $X_2=\{(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3;\ x^2+y^2=1\}$;

(3) $X_3=$单叶双曲面.

3. 设 $f:X\to Y$ 为一一对应,求证 f 是开映射$\Leftrightarrow f$ 是闭映射$\Leftrightarrow$ f^{-1}连续.

4. 设(X,d)为度量空间,$A\subset X$ 非空且闭,定义函数 $f:X\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=d(x,A)=\inf\{d(x,a);\ a\in A\}$,求证 f 连续,且

$$f(x)=0\Leftrightarrow x\in A.$$

5. 求证 $S^n\backslash\{x_0\}\cong\boldsymbol{R}^n$.

0.3 诱导拓扑

设 S 为拓扑空间 X 的非空子集,我们可以从 X 的拓扑得到 S 的拓扑.

0.3.1 定义 由 X 的拓扑**诱导出 S 上的拓扑**是指形如 $U\cap S$ 的集簇,其中 U 是 X 中的开集.

另外,如果 $\mathscr{U}$ 是 X 中的开集簇,则 $\mathscr{U}_S=\{U\cap S;U\in\mathscr{U}\}$ 是 S 上的开集簇,为证明 $\mathscr{U}_S$ 给出 S 上的拓扑,我们须验证关于拓扑的三个条件.因为 $\varnothing=\varnothing\cap S,S=S\cap X$,于是我们立即有第一条;关于第二个条件,令 $U_1\cap S,U_2\cap S$ 是 $\mathscr{U}_S$ 的二成员,则因$(U_1\cap S)\cap(U_2\cap S)=(U_1\cap U_2)\cap S\in\mathscr{U}_S$;最后,若$\{U_j\cap S;j\in J\}$是取自 $\mathscr{U}_S$ 中的任意子集簇,则

$$\bigcup_{j\in J}(U_j\cap S)=(\bigcup_{j\in J}U_j)\cap S\in\mathscr{U}_S.$$

诱导拓扑有时称为**相对拓扑**.如果 X 的子集 S 上有诱导拓扑,则说 S 为 X 的**子空间**.

例如,如果我们取 $\boldsymbol{R}$(具有通常拓扑)的子集$[a,b]$,且给它以相对拓扑,则集

$[a,c)\quad a<c\leqslant b$；$(d,b]\quad a\leqslant d<b$；$(d,c)\quad a\leqslant c,d\leqslant b$
都是$[a,b]$的开集. 注意，U 在$[a,b]$中开并不意味着 U 在 $\boldsymbol{R}$ 中开.

另一例子，我们给出 $\boldsymbol{R}^2$ 中的单位圆 S^1，其拓扑由 $\boldsymbol{R}^2$ 中的通常拓扑诱导出来. S^1 的开集便是“开弧”(即无端点的弧)的并. 更一般地，我们有 n 维单位球面 S^n

$$S^n = \{x \in \boldsymbol{R}^{n+1}; \sum_{i=0}^{n} x_i^2 - 1\},$$

其拓扑由 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上的通常拓扑诱导出来.

在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中，我们可考虑由 $x_{n+1}=0$ 决定的子集 S，如果给 S 以诱导拓扑，则 S 同胚于 $\boldsymbol{R}^n$，其证明留作练习.

研究 $\boldsymbol{R}^3$ 的子空间及寻求它与另一空间的同胚是有趣的. 例如在 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{R}^3$ 中，区间$[a,b]$与$[c,d]$是同胚的. 同胚映射 f 为

$$f(x) = c + (d-c)\cdot\frac{x-a}{b-a}.$$

不难求出 f^{-1}，且可证明 f 和 f^{-1} 都是连续的. 直观上，我们可拉伸或压缩一区间成为另一区间.

另一个例子我们来研究一圆和一正方形之边界，如图 0.3.1 所示，将 S^1 中从 x_i 到 x_{i+1} 的一段弧映成为正方形中从 y_i 到 y_{i+1} 的一边的映射 定义了一个从圆到正方形之边界的同胚.



图 0.3.1

其实，如果$\{(x,y);x^2+y^2=1\}$是圆，且$\{(x,y);x=\pm1,|y|\leqslant1$ 或$|x|\leqslant1,y=\pm1\}$是正方形之边界，则显然同胚是：

圆→正方形之边界　　　正方形之边界→圆

$(x,y)\to(x/m,y/m)$　　　$(x,y)\to(x/r,y/r)$

其中 $m=\max\{|x|,|y|\}$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$.

直观上，我们可以扭曲圆成正方形之边界. 一般地，如果我们有 $\boldsymbol{R}^3$（或 $\boldsymbol{R}^2$）的两个子空间，若能直观扭转、弯曲、拉伸或压缩一个而成为另一个，而且在变形过程中，不能有点迭在一起，也没有任何撕剪，则它们仍是同胚的. 比如，一个炸面团（形状带有一个洞）同胚于一个茶杯（有一个把），如图 0.3.2.

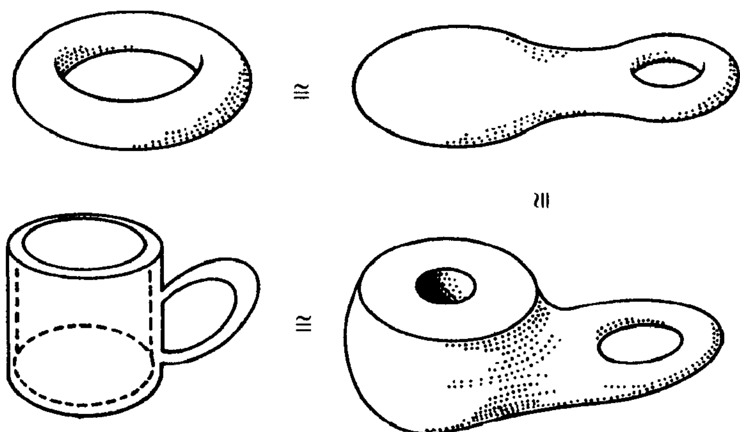


图 0.3.2

如果 $h: X\cong Y$ 是一个同胚，则对任一点 $x\in X$，空间 $X\setminus\{x\}$ 和 $Y\setminus\{h(x)\}$ 也是同胚的. 这给我们提供了一种证明空间不同胚的方法. 例如：$\boldsymbol{R}$ 的子空间 $[0,1]$ 和 $(0,1)$ 不同胚. 因为如果我们从 $[0,1]$ 中挖去一点 0，则得到 $(0,1]$，直观上，它仍是一段，而若从 $(0,1)$ 中挖去一点，则便（直观上）得到两段，更恰当的说，它是二非空开子集的不交并，而（直观上）一段不能同胚于两段（这相当于切割，切割是不连续的）. 从而 $[0,1]$ 不能同胚于 $(0,1)$.

上面的说法可推广到挖去两点或更多有限点的情形，读者可

利用上述说法完成下面的练习：

在图 0.3.3 中，选出构成 $\boldsymbol{R}^3$（或 $\boldsymbol{R}^2$）的同胚子空间的各集：

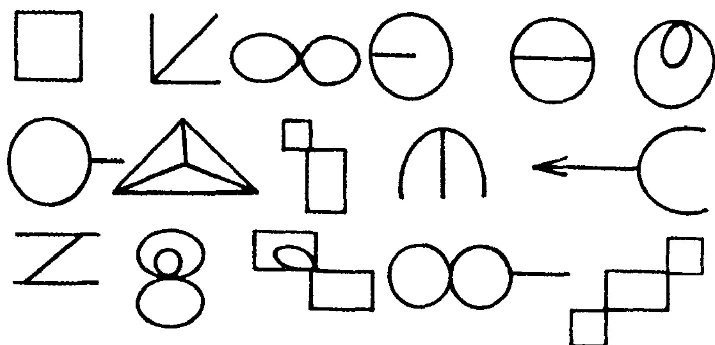


图 0.3.3

0.3.2 引理 (1)若 S 在 X 中是开的，则 S 中关于诱导拓扑的开集也是 X 的开集；

(2) 若 S 在 X 中是闭的，则 S 中关于诱导拓扑的闭集也是 X 的闭集.

证明 由于(1)和(2)的证明完全相同，我们仅证(1). 假设 S 是 X 中的开集，且令 U 是 S 中的开集，则 $U=S\cap V$，其中 V 为 X 的开集，但因 S 在 X 中开，所以 $U=S\cap V$ 在 X 中开. ■

习　题

1. 设 X 是拓扑空间，$B\subset A\subset X$，而 $\overline{B}_A$，$\mathrm{Int}_A B$ 分别为 B 在 A

中的闭包和内部，求证

(1) $\overline{B_A}=A\cap\overline{B}$；

(2) $\mathrm{Int}_A B=A\setminus\overline{(A\setminus B)}$；

(3) 若 A 在 X 中开，则 $\mathrm{Int}_A B=\mathrm{Int}B$.

2. 设 $A\subset X$ 是 X 的子空间，求证含入

$$i:A\to X$$

连续.

3. 证明：$f:X\to Y$ 连续$\Leftrightarrow f:X\to f(X)$连续.

4. 证明：若 $f:X\to Y$ 为同胚，则对子空间 $A\subset X$，$f|A:A\to f(A)$亦为同胚.

5. 设 $\boldsymbol{Q}$ 为全体有理数集并带有通常拓扑，求证：若 X 为只有可数个点的拓扑空间，则 $\exists$ 在上的连续映射 $f:\boldsymbol{Q}\to X$.

0.4 商 拓 扑

0.4.1 定义 设 $f:X\to Y$ 是从拓扑空间 X 到集合 Y 上的一个满射，则 Y 上相对于 f 的**商拓扑**定义为

$$\mathscr{U}_f:=\{U\subset Y;f^{-1}(U)\text{ 在 }X\text{ 中开}\}.$$

容易验证，$\mathscr{U}_f$ 满足关于拓扑的条件：显然 $\varnothing\in\mathscr{U}_f$，$Y\in\mathscr{U}_f$；另外二条件易从事实 $f^{-1}(U_1\cap U_2)=f^{-1}(U_1)\cap f^{-1}(U_2)$和 $f^{-1}(\bigcup_{j\in J}U_j)=\bigcup_{j\in J}f^{-1}(U_j)$推出.

注意，我们给 Y 以商拓扑之后，则映射 $f:X\to Y$ 是连续的.

商拓扑的一个有趣的例子是令 S^n 中的对径点对之集 $P^n:=\{(x,-x);x\in S^n\}$，显然存在一满射 $\pi:S^n\to P^n$，$\pi(x)=(x,-x)$，集 P^n 相对于映射 π 的商拓扑称为 n 维**实射影空间**.

第二个例子我们考虑空间 $C=\{(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3;x^2+y^2=1,|z|\leqslant 1\}$具有诱导拓扑($C$ 是圆柱面). 设 M 是 C 中对径点之集，即

$$M = \{(p, -p); p \in C\}$$

由于存在从 C 到 M 的自然满射，我们可给 M 以商拓扑，称其为**Möbius带**.

0.4.2 定理 设 $f: X \to Y$ 是一映射，且假设 Y 具有相对于 X 的商拓扑，则从 Y 到拓扑空间 Z 的映射 $g: Y \to Z$ 是连续的，当且仅当 $gf: X \to Z$ 是连续的.

证明 映射 $f: X \to Y$ 是连续的，且若 g 连续，则复合映射 gf 连续. 反之，若 gf 连续，则 $(gf)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ 是 X 的开集（V 为 Z 的开集），由 Y 中商拓扑的定义，$g^{-1}(V)$ 是 Y 的开集，从而 g 连续. ■

如果我们考虑某一等价关系的等价类，也能得到满射，即若 X 为拓扑空间，且 $\sim$ 是 X 上的一等价关系，令 $X/\sim$ 表示等价类之集，且定义 $f: X \to X/\sim$，$f(x) = [x]$—包含 x 的等价类. $X/\sim$ 具有的商拓扑常常说成是从 X 利用**拓扑同化**得到的，而 f 称为**商映射**. 例如，若 $\sim$ 是 S^n 上的一等价关系：$x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$，则 $S^n/\sim$ 即为 P^n；同样，柱面 C 上的类似等价关系也给出 $C/\sim$，即为 Möbius 带.

如果我们赋予 $\boldsymbol{R}^2$ 中单位正方形

$$X = \{(x,y);\ 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$$

以诱导拓扑，且定义 X 上的等价关系 $\sim$：

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow (x,y) = (x',y')$$

或 $$\{x,x'\} = \{0,1\} \text{ 且 } y = y',$$

则具有商拓扑的 $X/\sim$ 同胚于圆柱面.

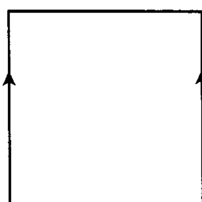
按类似的步骤我们还可建立 Möbius 带，此时 X 上的等价关系是

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow (x,y) = (x',y')$$

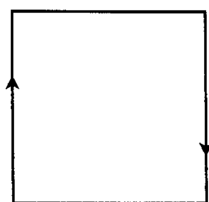
或 $$\{x,x'\} = \{0,1\} \text{ 且 } y = 1 - y'$$

则 $X/\sim$ 同胚于 Möbius 带.

注 上面二例直观上可看成将正方形区域的边界按图 0.4.1(a)(b)中所示的箭头方向粘合起来.



(a) 柱面



(b) Möbius 带

图 0.4.1

若在正方形 X 上分别给出等价关系

(1) $\sim$: $(0,y)\sim(1,y)$, $(x,0)\sim(x,1)$

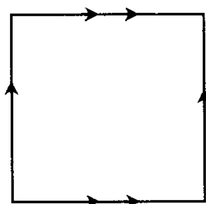
当 $x,y\neq 0,1$ 时, $(x,y)\sim(x',y')\Leftrightarrow x=x', y=y'$

(2) $\sim'$: $(0,y)\sim'(1,y)$, $(x,0)\sim'(1-x,0)$

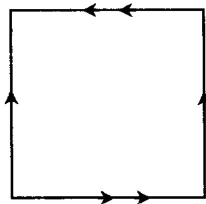
当 $x,y\neq 0,1$ 时, $(x,y)\sim'(x',y')\Leftrightarrow x=x', y=y'$

则 $X/\sim$ 同胚于环面, $X/\sim'$ 同胚于 Klein 瓶.

注 直观上, $X/\sim$, $X/\sim'$ 可分别看成按图 0.4.2(a)(b)中箭头所示的方式粘合正方形的边界而成的图形.



(a) 环面



(b) Klein 瓶

图 0.4.2

习　题

1. 设 $f: X \to Y$ 为到上的映射

(1) 令 $R=\{(x_1,x_2)\in X^2; f(x_1)=f(x_2)\}$，证明 R 为 X 中的等价关系；

(2) 定义 $\tilde{f}: X/R \to Y$，使对 $\forall [x]\in X/R$，$\tilde{f}([x])=f(x)$，求证 $\tilde{f}$ 是到上的且是合理的；

(3) 求证 $\tilde{f}$ 为同胚 $\Leftrightarrow Y$ 的拓扑对 f 及 X 的拓扑而言是商拓扑.

2. 求证：若 $f: X \to Y$ 为到上连续的闭映射，则 Y 的拓扑为商拓扑.

3. 证明：将单位区间 $[0,1]$ 的两个端点"粘合"起来，所得到的空间同胚于 S^1.

4. 若将 Möbius 带的边界粘成一点，则得到什么空间？

5. 求证 $D^n/S^{n-1}\cong S^n$.

6. 若定义 $CX=X\times I/X\times 1$，求证 $CS^{n-1}\cong D^n$.

0.5　积　空　间

0.5.1 定义　设 X 和 Y 是拓扑空间，**拓扑积** $X\times Y$ 是指具有拓扑 $\mathscr{U}_{X\times Y}$ 的集合，其中 $\mathscr{U}_{X\times Y}$ 是 X,Y 开集积的并集之簇. 显然 $\mathscr{U}_{X\times Y}$ 的一般元素形如 $\bigcup_{j\in J}U_j\times V_j$，其中 J 为某一指标集，且对每一 $j\in J$，U_j 和 V_j 分别为 X、Y 的开集. $\mathscr{U}_{X\times Y}$ 是拓扑不难验证：$\varnothing=\varnothing\times\varnothing\in\mathscr{U}_{X\times Y}$，$X\times Y\in\mathscr{U}_{X\times Y}$，从而第一个条件满足；若 $W,W'\in\mathscr{U}_{X\times Y}$，则 $W=\bigcup_{j\in J}U_j\times V_j$，$W'=\bigcup_{k\in K}U'_k\times V'_k$，其中 U_j，U'_k 为 X 的

开集，V_j，V'_k 为 Y 的开集，因为

$$W \cap W' = \bigcup_{(j,k)\in J\times K} (U_j \cap U'_k) \times (V_j \cap V'_k)$$

可见第二个条件也满足. 第三个条件自然满足.

注 我们容易将 X 和 Y 的拓扑积的概念推广到有限个拓扑空间的拓扑积的情形.

下面的定理描述了 $X\times Y$ 上的拓扑的特征.

0.5.2 定理 设 $X\times Y$ 是二拓扑空间的积，集 $W\subset X\times Y$ 是开的，当且仅当对任意 $w\in W$，$\exists U_w, V_w$ 分别为 X 和 Y 的开集，使得 $w\in U_w\times V_w\subset W$.

证明 假设 W 是开的，则 $W=\bigcup_{j\in J} U_j\times V_j$，其中 J 为指标集，U_j，V_j 分别为 X，Y 的开子集，从而若 $w\in W$，则 $\exists i\in J$，使 $w\in U_i\times V_i$. 反之，$\bigcup_{w\in W} U_w\times V_w$ 是 $X\times Y$ 的开集，且显然等于 W. ■

显然存在投射 $\pi_X: X\times Y\to X$ 和 $\pi_Y: X\times Y\to Y$，$\pi_X((x,y))=x$，$\pi_Y((x,y))=y$. 它们称为**积投影**. 因为 $\pi_X^{-1}(U)=U\times Y$，$\pi_Y^{-1}(V)=X\times V$，从而 π_X，π_Y 都是连续的.

0.5.3 定理 对任一 $y\in Y$，子空间 $X\times\{y\}\subset X\times Y$ 同胚于 X.

证明 考虑映射 $f: X\times\{y\}\to X$，$f(x,y)=x$，这显然是双射，我们可把 f 写成含入 $X\times\{y\}\to X\times Y$ 和投射 $\pi_X: X\times Y\to X$ 的复合，且因二者连续，所以 f 连续. 下面假设 W 是 $X\times\{y\}$ 的开集，所以 $W=(\bigcup_{j\in J} U_j\times V_j)\cap(X\times\{y\})$，其中 U_j，V_j 分别为 X 和 Y 的开集，我们可将 W 写成 $\bigcup_{j\in J'} U_j\times\{y\}$，其中 $J'=\{j\in J; y\in V_j\}$，这样 $f(W)=\bigcup_{j\in J'} U_j$，它是 X 中的开集，从而 f 为开映射，即 f 为一同胚映射. ■

若 $f: A\to X$ 和 $g: A\to Y$ 是拓扑空间间的映射，则我们可定义映射 $h: A\to X\times Y, h(a)=(f(a),g(a))$. 显然 h 是使 $\pi_X h=f$ 且 $\pi_Y h=g$ 的唯一映射.

0.5.4 定理 设 A、X 和 Y 为拓扑空间，则对任一对映射 $f: A\to X, g: A\to Y$，映射 $h: A\to X\times Y, h(a)=(f(a),g(a))$ 是连续的，当且仅当 f,g 连续.

证明 若 h 连续，则 $f=\pi_X h, g=\pi_Y h$ 也连续. 反之，假设 $f\cdot g$ 连续，则 $h^{-1}(U\times V)=\{a; f(a)\in U, g(a)\in V\}=f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$，但因 $f^{-1}(U)$ 和 $g^{-1}(V)$ 都开，所以 $h^{-1}(U\times V)$ 开. 今考虑 $X\times Y$ 的开集 W，若 $x\in W$，则 $x\in U\times V\subset W$，其中 U、V 是 X、Y 中的开集，这样 $h^{-1}(x)\subset f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)\subset h^{-1}(W)$，从而 $h^{-1}(W)$ 是开集，即 h 连续. ■

习　题

1. 设 $A\subset X, B\subset Y$，求证

(1) $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$;

(2) $\mathrm{Int}(A\times B)=\mathrm{Int}A\times\mathrm{Int}B$.

2. 证明投影 $\pi_i: X_1\times X_2\to X_i \quad i=1,2$ 为连续开映射.

3. 证明 X 为 Hausdorff 空间 $\Leftrightarrow X\times X$ 的对角线 $\Delta=\{(x,x)\in X\times X; x\in X\}$ 为其闭子集.

4. 求证：$f: X\to X\times Y, f(x)=(x,y_0)$ 及 $g: Y\to X\times Y, g(y)=(x_0,y)$ 均为嵌入映射.

5. 求证 $[0,1)\times[0,1)\cong[0,1]\times[0,1)$.

第1章　复形与可剖空间

1.1　单　　形

令 $\boldsymbol{R}^n$ 表示线性的 n 维欧氏空间.

1.1.1 定义　设点集$\{a_0,a_1,\cdots,a_q\}\subset\boldsymbol{R}^n$,若矢量组 $a_1-a_0,a_2-a_0,\cdots,a_q-a_0$ 线性无关,则称点集$\{a_0,a_1,\cdots,a_q\}$在 $\boldsymbol{R}^n$ 中是**几何独立的**.

1.1.2 定义　设点集$\{a_0,a_1,\cdots,a_q\}$在 $\boldsymbol{R}^n$ 中是几何独立的,令

$$\underline{\sigma}^q=\{x\in\boldsymbol{R}^n;x=\sum_{i=0}^{q}\lambda_i a_i,\lambda_i\geqslant 0,\sum_{i=0}^{q}\lambda_i=1\}$$

称$\underline{\sigma}^q$ 为 q 维**几何单形**,简称 q 维**单形**,记作

$$\langle a_0,a_1,\cdots,a_q\rangle,$$

$a_0,a_1,\cdots,a_q$ 称为 q 维单形$\underline{\sigma}^q$ 的**顶点**,实数 λ_i 称为点 x 在 q 维单形$\underline{\sigma}^q$ 中的**重心坐标**.

注　在 q 维单形$\underline{\sigma}^q$ 上,我们总取诱导拓扑.

今给出几个低维单形的例子(如图 1.1.1):

(1)0 维单形＝一个点;

(2)1 维单形＝闭线段;

(3)2 维单形＝三角形(三角形区域);

(4)3 维单形＝四面体.

1.1.3　引理　设$\underline{\sigma}^q=\langle a_0,a_1,\cdots,a_q\rangle$是 q 维单形,若 $x\in\underline{\sigma}^q$,则 $x\overline{\in}\{a_0,a_1,\cdots,a_q\}$,即 x 不为顶点$\Leftrightarrow\exists\, x_1,x_2\in\underline{\sigma}^q,x_1\neq x_2$,使

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

证明 若 $x \overline{\in} \{a_0, a_1, \cdots, a_q\}$，则点 x 在单形$\underline{\sigma}^q$ 中的重心坐标

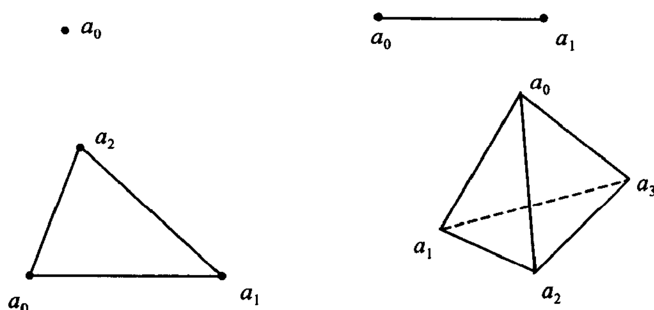


图 1.1.1

$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 至少有两个大于 0，令 $\lambda_{i0}, \lambda_{j0} > 0$，取 $\varepsilon > 0$，使 $\varepsilon < \min\{\lambda_{i0}, \lambda_{j0}\}$，再令

$$x_1 = x + \varepsilon a_{i0} - \varepsilon a_{j0}$$

$$x_2 = x - \varepsilon a_{i0} + \varepsilon a_{j0}$$

则 $x_1, x_2 \in \underline{\sigma}^q$，且 $x_1 \neq x_2$（否则 $a_{i0} = a_{j0}$），显然 $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

反之，若 $\exists\, x_1, x_2 \in \underline{\sigma}^q, x_1 \neq x_2$，满足 $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$，设 x_1, x_2 在$\underline{\sigma}^q$ 中的重心坐标分别为

$$\lambda_0^1, \lambda_1^1, \cdots, \lambda_q^1$$

$$\lambda_0^2, \lambda_1^2, \cdots, \lambda_q^2$$

于是 $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \sum_{i=0}^{q} \frac{\lambda_i^1 + \lambda_i^2}{2} a_i$，即 x 在$\underline{\sigma}^q$ 中的重心坐标为

$$\frac{1}{2}(\lambda_0^1 + \lambda_0^2), \frac{1}{2}(\lambda_1^1 + \lambda_1^2), \cdots, \frac{1}{2}(\lambda_q^1 + \lambda_q^2).$$

若仅有 $\frac{1}{2}(\lambda_{i_0}^1 + \lambda_{i_0}^2) \neq 0$，则 $\lambda_j^1 = -\lambda_j^2 (j \neq i_0)$ 且 $\frac{1}{2}(\lambda_{i_0}^1 + \lambda_{i_0}^2) = 1 \Rightarrow \lambda_{i_0}^1 + \lambda_{i_0}^2 = 2 \Rightarrow \lambda_{i_0}^1 = \lambda_{i_0}^2 = 1 \Rightarrow \lambda_j^1 = \lambda_j^2 = 0 \ (j \neq i_0) \Rightarrow x_1 = x_2$，这不可能，故

诸$\frac{1}{2}(\lambda_i^1+\lambda_i^2)$至少有二非 0，所以 x 不为顶点，即

$$x \overline{\in} \{a_0, a_1, \cdots, a_q\}. \qquad \blacksquare$$

1.1.4 定理 单形由它的顶点和维数唯一决定，即若设

$$\underline{\sigma}^q = \langle a_0, a_1, \cdots, a_q \rangle$$

与

$$\underline{\tau}^p = \langle b_0, b_1, \cdots, b_p \rangle$$

分别为 q 维和 p 维单形，如果$\underline{\sigma}^q = \underline{\tau}^p$，则

$$\{a_0, a_1, \cdots, a_q\} = \{b_0, b_1, \cdots, b_p\},$$

特别地 $q=p$.

证明 由引理 1.1.3,

$\{a_0, a_1, \cdots, a_q\} = \{x \in \underline{\sigma}^q$；不存在 $x_1, x_2 \in \underline{\sigma}^q, x_1 \neq x_2$，使 $x = \frac{1}{2}(x_1+x_2)\}$,

$\{b_0, b_1, \cdots, b_p\} = \{x \in \underline{\tau}^p$；不存在 $x_1, x_2 \in \underline{\tau}^p, x_1 \neq x_2$，使 $x = \frac{1}{2}(x_1+x_2)\}$.

由题设$\underline{\sigma}^q = \underline{\tau}^p$，所以

$$\{a_0, a_1, \cdots, a_q\} = \{b_0, b_1, \cdots, b_p\},$$

因为$\{a_0, a_1, \cdots, a_q\}$，$\{b_0, b_1, \cdots, b_p\}$均为互不相同的点的集合，故 $q = p$. ■

1.1.5 定义 设$\underline{\sigma}^q = \langle a_0, a_1, \cdots, a_q \rangle$为 q 维单形，在$\underline{\sigma}^q$ 的顶点集中任取$k+1$ 个互不相同的点 $a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ $(k \leqslant q)$，则 k 维单形

$$\underline{\tau}^k = \langle a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k} \rangle$$

称为 q 维单形$\underline{\sigma}^q$ 的**面**，记作$\underline{\tau}^k \leqslant \underline{\sigma}^q$. 当$\underline{\tau}^k \neq \underline{\sigma}^q$ 时，还称$\underline{\tau}^k$ 为$\underline{\sigma}^q$ 的**真面**，记作$\underline{\tau}^k < \underline{\sigma}^q$.

1.1.6 定义 设点集$\{e_0, e_1, \cdots, e_q\} \subset \boldsymbol{R}^{q+1}$，其中

$$e_0 = (1,0,\cdots,0)$$
$$e_1 = (0,1,0,\cdots,0)$$
$$\cdots\cdots$$
$$e_q = (0,0,\cdots,0,1)$$

则 q 维单形

$$\underline{\triangle}^q = \langle e_0, e_1, \cdots, e_q \rangle$$

称为**标准 q 维单形**. 在$\underline{\triangle}^q$ 上总取诱导拓扑.

注 若$\underline{\triangle}^q$ 为 q 维标准单形,则

(1) 设 $x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i e_i \in \underline{\triangle}^q = \langle e_0, e_1, \cdots, e_q \rangle$,则 x 在 $\underline{\triangle}^q$ 中的重心坐标 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ 恰为点 x 的直角坐标;

(2) $\underline{\triangle}^q$ 是 $\boldsymbol{R}^{q+1}$ 中的有界闭集,因而是紧致的.

1.1.7 定理 设$\underline{\triangle}^q = \langle e_0, e_1, \cdots, e_q \rangle$为标准 q 维单形,$\underline{\sigma}^q = \langle a_0, a_1, \cdots, a_q \rangle$为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 q 维单形,则$\underline{\triangle}^q$ 与$\underline{\sigma}^q$ 在保持重心坐标不变的对应下同胚.

证明 对于 $x = (\lambda_0, \cdots, \lambda_q) \in \boldsymbol{R}^{q+1}$,令

$$f(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i a_i,$$

则

$$f: \boldsymbol{R}^{q+1} \to \boldsymbol{R}^n$$

是线性映射,从而是连续的. 所以限制映射

$$\varphi = f \mid \underline{\triangle}^q : \underline{\triangle}^q \to \underline{\sigma}^q$$

也连续. 注意到$\underline{\triangle}^q$ 中点的重心坐标与其在 $\boldsymbol{R}^{q+1}$ 中的坐标一致,以及重心坐标的唯一性,可知 φ 是双射(单、满的),所以连续映射

$$\varphi: \underline{\triangle}^q \to \underline{\sigma}^q$$

作为从紧空间$\underline{\triangle}^q$ 到 Hausdorff 空间$\underline{\sigma}^q$ 的双射必定是 -同胚,且保持点的重点坐标不变. ■

1.1.8 推论 任意两个同维数的单形在保持重心坐标不变的对应下同胚.

习 题

1. 设$\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$在欧氏空间中是几何独立的,$b$是欧氏空间的一点,则$\{a_0, a_1, \cdots, a_n, b\}$几何独立$\Leftrightarrow b$不在$\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$可张成的超平面上.

2. 设$\underline{\sigma}^n = \langle a_0, \cdots, a_n \rangle$是$n$维单形,$b$是欧氏空间中的一点,使得对$\forall x, x' \in \underline{\sigma}^n (x \neq x')$,线段$\overline{bx}$与$\overline{bx'}$只交于$b$,则$\{a_0, \cdots, a_n, b\}$是几何独立的.

3. 设单形$\underline{\sigma}^q = \langle a_0, \cdots, a_q \rangle$,求证$\underline{\sigma}^q$中的点正是从$a_0$到由$a_1, \cdots, a_q$张成的单形$\underline{\sigma}^{q-1} = \langle a_1, \cdots, a_q \rangle$的各点连接线段之并.

4. 求证:给定一单形$\underline{\sigma}$,存在一组且仅存在一组几何独立的点张成它.

5. 求证单形$\underline{\sigma}^n \cong D^n$且$\underline{\sigma}^n$的边界同胚于$S^{n-1}$.

1.2 复 形

1.2.1 定义 设$\underline{\sigma}$和$\underline{\tau}$为两个单形,若$\underline{\sigma} \cap \underline{\tau} = \emptyset$或是$\underline{\sigma}$,$\underline{\tau}$的一个公共面,则称$\underline{\sigma}$与$\underline{\tau}$是**规则相处**的(图 1.2.1(a)). 否则,则称它们是**非规则相处**的(图 1.2.1(b)).

1.2.2 定理 一个单形的任意两个面都是规则相处的.

证明 设$\underline{\sigma}^q = \langle a_0, a_1, \cdots, a_q \rangle$为$q$维单形,又设

$$\underline{\tau}^r = \langle a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_r} \rangle \leqslant \underline{\sigma}^q$$

与

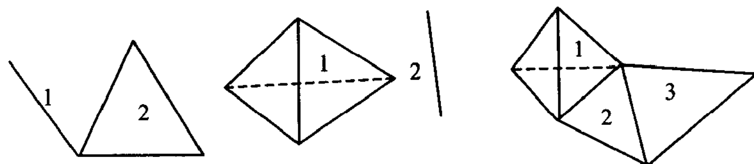
$$\underline{\delta}^t = \langle a_{j_0}, a_{j_1}, \cdots, a_{j_t} \rangle \leqslant \underline{\sigma}^q$$

为$\underline{\sigma}^q$ 的任意二面，对于 $x=\sum_{i=0}^{q}\lambda_i a_i\in\underline{\sigma}^q$，则

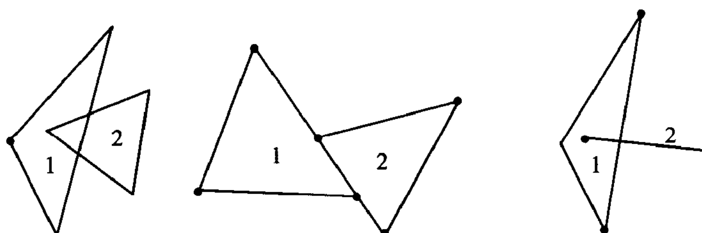
(1) $x\in\underline{\tau}^r\Leftrightarrow\lambda_k=0$，当 $k\overline{\in}\{i_0,i_1,\cdots,i_r\}$时；

(2) $x\in\underline{\delta}^t\Leftrightarrow\lambda_k=0$，当 $k\overline{\in}\{j_0,j_1,\cdots,j_t\}$时；

从而，$x\in\underline{\tau}^r\cap\underline{\delta}^t\Leftrightarrow\lambda_k=0$，当 $k\overline{\in}\{i_0,i_1,\cdots,i_r\}\cap\{j_0,j_1,\cdots,j_t\}$时.



(a) 规则相处的单形



(b) 非规则相处的单形

图 1.2.1

这样

(a)若$\{i_0,i_1,\cdots,i_r\}\cap\{j_1,j_2,\cdots,j_t\}=\varnothing$，则$\underline{\tau}^r\cap\underline{\delta}^t=\varnothing$

(b) 若$\{i_0,i_1,\cdots,i_r\}\cap\{j_1,j_2,\cdots,j_t\}=\{l_0,l_1,\cdots,l_p\}\neq\varnothing$

则

$$\underline{\tau}^r\cap\underline{\delta}^t=\left\{x=\sum_{k=0}^{p}\lambda_{l_k}a_{l_k};\lambda_{l_k}\geqslant 0,\sum_{k=0}^{p}\lambda_{l_k}=1\right\}$$

$$=\langle a_{l_0},a_{l_1},\cdots,a_{l_p}\rangle,$$

此即为$\underline{\tau}^r$ 与$\underline{\delta}^t$ 的一个公共面，从而证明了$\underline{\tau}^r$ 与$\underline{\delta}^t$ 是规则相处的. ■

1.2.3 定义 设 $K=\{\underline{\sigma}_i^q;q=0,1,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,\alpha_q\}$是 $\boldsymbol{R}^m$ 中有限个单形的集合，若满足

(1)K 中任意两个单形都是规则相处的；

(2) K 中任意单形的任意一个面仍是 K 中的单形，则称 K 为**单纯复形**，简称**复形**.

复形 K 中的 0 维单形称为复形 K 的**顶点**. 又定义 K 的**维数** $\dim K := \max\{q; \sigma^q \in K\}$，即 K 的维数是 K 中单形维数的最大值.

1.2.4 定义 设 K 为 n 维复形，对于非负整数 $q \leqslant n$，令

$$K^q = \{\underline{\sigma}^r \in K; r \leqslant q\}$$

称其为复形 K 的 q 维**骨架**.

1.2.5 定义 设 K, L 为二复形，若 $L \subset K$，则称 L 为 K 的**子复形**.

1.2.6 定义 设 $\underline{\sigma}^q$ 是 q 维单形，令

$$\mathrm{Cl}\, \underline{\sigma}^q := \{\underline{\tau}; \underline{\tau} \leqslant \underline{\sigma}^q\},$$

$$\mathrm{Bd}\, \underline{\sigma}^q := \{\underline{\tau}; \underline{\tau} < \underline{\sigma}^q\},$$

由上面定理 1.2.2，$\mathrm{Cl}\, \underline{\sigma}^q$ 与 $\mathrm{Bd}\, \underline{\sigma}^q$ 都是复形，分别称为 q 维单形 $\underline{\sigma}^q$ 的**闭包复形**与**边缘复形**，且显然 $\dim(\mathrm{Cl}\, \underline{\sigma}^q) = \dim \underline{\sigma}^q = q$.

1.2.7 定义 设 K 为复形，令

$$|K| = \bigcup_{\underline{\sigma} \in K} \underline{\sigma},$$

且在 $|K|$ 上给以诱导拓扑，则称 $|K|$ 为复形 K 的**基础空间**或**多面体**.

注 K 与 $|K|$ 的区别在于：

(1)K 是以单形为元素的集合，而 $|K|$ 则是以点为元素的集合；

(2) K 上无拓扑结构，而 $|K|$ 却被赋以拓扑结构.

由于单形都是紧的，所以任意复形 K 的基础空间 $|K|$（作为

有限个紧子集之并)也都是紧的，并且复形 K 中的每一单形，作为紧空间 $|K|$ 的紧子集，从而它们都是基础空间 $|K|$ 的闭子集.

习　题

1. 设 K 是复形，而 $\sigma\in K$，试问何时 $\text{Int}\sigma\subset|K|$ 开？何时 $\sigma\subset|K|$ 开？

2. 设 K 是单形的有限集，求证 K 为复形的充要条件是

(1) 若 $\underline{\sigma}\in K$，则 $\underline{\sigma}$ 的面也在 K 中；

(2) K 中任二单形的内部不交.

3. 若 K_1, K_2 均为 K 的子复形，则 $K_1\cup K_2$ 与 $K_1\cap K_2$ 也都是 K 的子复形.

4. 称复形 K 是连通的，如果其不能分成二互不相交的非空子复形之并. 求证下列命题等价：

(1) K 连通；

(2) $|K|$ 连通；

(3) K^1 连通.

5. 设 K 为复形，求证 $|K|=\bigcup\limits_{\underline{\sigma}\in K}\text{Int}\underline{\sigma}$.

6. 求证：若 K 连通，则 K 的任二顶点可用一条那样的道路连接，它的像由 K 的一组顶点和棱构成.

1.3　可剖空间

1.3.1 定义　设 X 为一拓扑空间，若存在一复形 K 和一个同胚 $\varphi: |K|\to X$，则称偶对 (K,φ) 为拓扑空间 X 的一个**单纯剖分**或**三角剖分**. 为简单起见，常常称 K 是 X 的一个**单纯剖分**.

若拓扑空间 X 存在一个单纯剖分，则称 X 为**可剖空间**.

若拓扑空间 X 有一单纯剖分(K,φ)，则可剖空间 X 可形象地称为弯曲多面体. 对于单形$\underline{\sigma}\in K$，$\underline{\sigma}$在同胚 φ 下的像 $\varphi(\underline{\sigma})$称为**弯曲单形**，弯曲单形的集合$\{\varphi(\underline{\sigma});\underline{\sigma}\in K\}$称为**弯曲复形**，也称为拓扑空间 X 的一个**弯曲单纯剖分**，简称**单纯剖分**. 拓扑学是研究几何图形的拓扑性质的，从拓扑观点看，$|K|$与其同胚像 X 没有什么区别. 因此，研究了多面体的拓扑性质也就研究了可剖空间的拓扑性质. 尽管要求拓扑空间可单纯剖分是一个很强的要求，然而很多重要的拓扑空间都是可剖分的. 例如所有闭曲面都是可以单纯剖分的. 注意可剖空间的单纯剖分不是唯一的.

1.3.2　可剖空间的例子

例 1　2 维球面 S^2

三维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的 2 维球面

$$S^2 := \{(x_1,x_2,x_3)\in \boldsymbol{R}^3;\sum_{i=1}^{3}x_i^2=1\},$$

而同胚于 S^2 的任一拓扑空间也常称作 2 维球面，且仍记作 S^2. 因为 S^2 同胚于 3 维单形$\underline{\sigma}^3=\langle a_0,a_1,a_2,a_3\rangle$的边缘复形 $\mathrm{Bd}\,\underline{\sigma}^3$ 的基础空间(多面体)$|\mathrm{Bd}\,\underline{\sigma}^3|$，所以 $K=\mathrm{Bd}\,\underline{\sigma}^3$ 是 S^2 的一个单纯剖分.

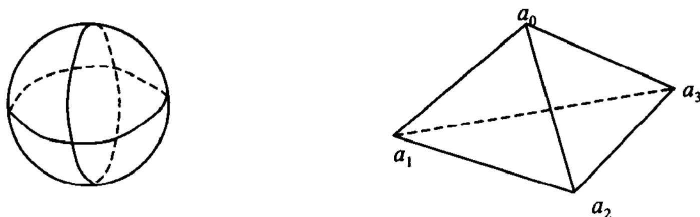


图 1.3.1　二维球面与它的一个单纯剖分

例 2　n 维球面 S^n

$n+1$ 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^{n+1}$中的 n 维球面

$$S^n := \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}.$$

而同胚于 S^n 的任意拓扑空间也常称为 n 维球面，且仍记作 S^n.

设$\underline{\sigma}^{n+1}$为 $n+1$ 维单形，定义映射

$$\varphi: |\operatorname{Bd} \underline{\sigma}^{n+1}| \to S^n$$

如下：对任意点 $x \in |\operatorname{Bd} \underline{\sigma}^{n+1}|$，令

$$\varphi(x) = \frac{x - x_0}{\| x - x_0 \|},$$

其中 x_0 为$\underline{\sigma}^{n+1}$的内点，即在$\underline{\sigma}^{n+1}$中诸重心坐标都大于 0 的点，则 φ 是同胚. 所以$(\operatorname{Bd}\underline{\sigma}^{n+1}, \varphi)$是 n 维球面 S^n 的一个单纯剖分.

例 3 Möbius 带

如图 1.3.2(a)，将 $\boldsymbol{R}^2$ 中矩形域的一对对边依图中箭头指示的方向粘合起来所得到的拓扑空间(如图 1.3.2(b)所示)，称为 Möbius带.

图(b)同胚于图(c)，Mobius 带的一个单纯剖分如图 1.3.2(d)所示；图 1.3.2(e)为 Möbius 带的一个弯曲单纯剖分. 换言之，将图 1.3.2(e)依箭头指示的方向将其一对对边粘合起来可以构造出三维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的一个单纯复形，它的多面体同胚于 Möbius带.

例 4 环面 T^2

在三维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中，令

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3; (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\},$$

则 T^2 或同胚于 T^2 的任何拓扑空间都称作环面，仍记作 T^2，如图 1.3.3(a)所示.

环面 T^2 的弯曲单纯剖分的一个模型在图 1.3.3(b)中给出，它有 $\alpha_0 = 9$ 个顶点，$\alpha_1 = 21$ 个 1 维单形，$\alpha_2 = 18$ 个 2 维单形. 将长方形区域的两对对边依箭头指示的方向粘合起来，可以构造成 $\boldsymbol{R}^3$ 中的一个复形，它的多面体同胚于环面 T^2(如图 1.3.4 所示).

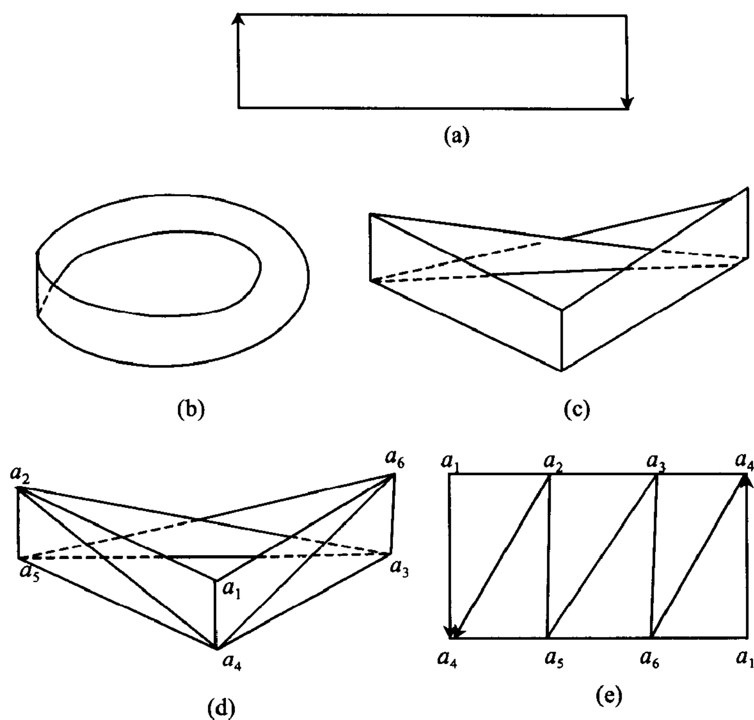


图 1.3.2　Mobius 带与它的一个单纯剖分

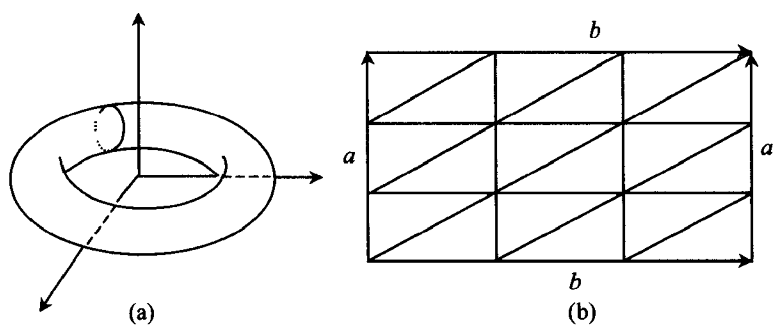


图 1.3.3　环面 T^2 与它的一个单纯剖分

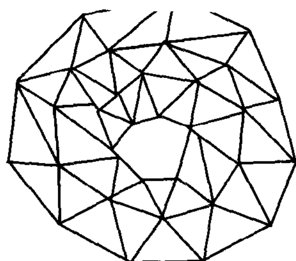


图 1.3.4

例 5 射形平面 P^2

将 2 维球面 S^2 的每对对径点粘合起来，或将 2 维圆盘 D^2 的边界圆周 S^1 上的每对对径点粘合起来所得到的拓扑空间，或同胚于它们的任意拓扑空间都称作 2 维射影平面，记作 P^2.

射影平面 P^2 的一个弯曲的单纯剖分如图 1.3.5 图所示，它有 $\alpha_0=6$ 个顶点，$\alpha_1=15$ 个 1 维单形，$\alpha_2=10$ 个 2 维单形.

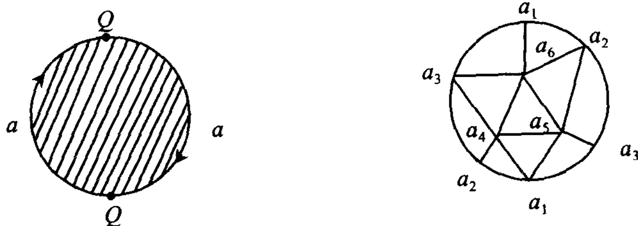


图 1.3.5 射影平面 P^2 与它的一个单纯剖分

习 题

1. 若 X 与 Y 均为可剖空间，证明 $X\times Y$ 也为可剖空间.
2. 给出圆柱面，Klein 瓶及双环面的一单纯剖分.
3. 给出实射影平面 P^2 的另一个单纯剖分.

1.4 单纯映射

1.4.1 定义 设 K 与 L 都是复形，则映射

$$f: K \to L$$

称为**单纯映射**，如果它满足

(1) f 将复形 K 的顶点映射为复形 L 的顶点，即 $f(K^0) \subset L^0$；

(2) 若$\underline{\sigma}^q = \langle a_0, a_1, \cdots, a_q \rangle \in K$，则 $f(\underline{\sigma}^q) = \underline{\tau}^p \in L$，当且仅当$\underline{\tau}^p$以 $f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_q)$为其全部顶点（注意：$f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_q)$不一定互不相同）.

显然，复形 K 上的恒等映射

$$I_K: K \to K$$

是单纯映射. 单纯映射 $f: K \to L$ 与单纯映射 $g: L \to M$ 的复合 $gf: K \to M$ 仍是单纯映射.

1.4.2 定义 设 $f: K \to L$ 是单纯映射，若 f 是单满的（即 f 是双射），则称单纯映射 f 为**单纯同构映射**. 此时，称复形 K 与 L 是**同构**的，记作 $K \cong L$.

在全体复形集合上，复形之间的同构关系$\cong$是一个等价关系.

1.4.3 定义 设 $f: K \to L$ 为单纯映射，对任意点 $x \in |K|$，存在单形$\underline{\sigma}^q = \langle a_0, a_1, \cdots, a_q \rangle \in K$，使得 $x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i a_i \in \underline{\sigma}^q$，令

$$f(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i f(a_i) \in |L|,$$

则 $f: |K| \to |L|$ 是一个映射，称作由单纯映射 $f: K \to L$ 诱导出的从基础空间$|K|$到基础空间$|L|$的**单纯映射**.

1.4.4 定理　设 $f: K \to L$ 为单纯映射，则由 f 诱导出的单纯映射

$$f: |K| \to |L|$$

是连续的.

证明　任取 $\underline{\sigma}^q = \langle a_0, a_1, \cdots, a_q \rangle \in K$，令

$$\underline{\tau}^p = f(\underline{\sigma}^q)$$

设 $\underline{\triangle}^q = \langle e_0, e_1, \cdots, e_q \rangle$ 为标准 q 维单形，则存在保持重心坐标不变的同胚

$$\varphi: \underline{\triangle}^q \to \underline{\sigma}^q.$$

对于任意点 $y = \sum_{i=0}^{q} u_i e_i \in \underline{\triangle}^q$，令

$$g(y) = \sum_{i=0}^{q} u_i f(a_i) \in \underline{\tau}^p,$$

则 $g: \underline{\triangle}^q \to \underline{\tau}^p$ 是连续映射.

现在对任意点 $x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i a_i \in \underline{\sigma}^q$，则

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i=0}^{q} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i f(a_i) \\ &= g\left(\sum_{i=0}^{q} \lambda_i e_i\right) = g\left(\sum_{i=0}^{q} \lambda_i \varphi^{-1}(a_i)\right) \\ &= g\varphi^{-1}\left(\sum_{i=0}^{g} \lambda_i a_i\right) = g\varphi^{-1}(x), \end{aligned}$$

如图 1.4.1 所示.

因为 $g\varphi^{-1}: \underline{\sigma}^q \to \underline{\tau}^p$ 是连续映射，所以限制映射

$$f \mid \underline{\sigma}^q (= g\varphi^{-1}): \underline{\sigma}^q \to \underline{\tau}^p \subset |L|$$

是连续的.

由于复形 K 是其基础空间 $|K|$ 的一个有限闭覆盖，故由点集拓扑学中的粘结引理可得

$$f:|K|\to|L|$$

是连续的. 

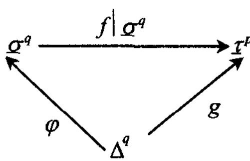


图 1.4.1

1.4.5 定理 设复形 K 有 $m+1$ 个顶点：$a_0,a_1,\cdots,a_m$，而$\underline{\triangle}^m=\langle e_0,e_1,\cdots,e_m\rangle$为标准 m 维单形，则存在闭包复形 $\mathrm{Cl}\underline{\triangle}^m$ 的子复形 N，使

$$K\cong N,\quad 且 |K|\cong|N|.$$

证明 令 $N=\{\langle e_{i_0},e_{i_1},\cdots,e_{i_q}\rangle\in \mathrm{Cl}\underline{\triangle}^m;\langle a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_q}\rangle\in K\}$，则 N 是闭包复形 $\mathrm{Cl}\underline{\triangle}^m$ 的子复形.

对于任意单形 $\underline{\sigma}^q=\langle e_{i_0},e_{i_1},\cdots,e_{i_q}\rangle\in N$，令

$$f(\underline{\sigma}^q)=\langle a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_q}\rangle\in K,$$

特别地，$f(e_i)=a_i\quad i=0,1,\cdots,m.$

则易证

$$f:N\to K$$

是单纯同构映射，所以 $N\cong K$.

再由定理 1.4.4，单纯映射 $f:N\to K$ 诱导出的单纯映射 $f:|N|\to|K|$是连续映射，不难看出，$f:|N|\to|K|$还是满的. 下面证明：$f:|N|\to|K|$又是单映射.

事实上，设 $x_1,x_2\in|N|$，则

$$x_1\in\underline{\sigma}^s\in N,x_2\in\underline{\sigma}^t\in N,$$

即

$$x_1=\sum_{k=0}^{s}\lambda_{i_k}e_{i_k},x_2=\sum_{k=0}^{t}\mu_{j_k}e_{j_k}$$

设 $\lambda_{i_{k_0}},\lambda_{i_{k_1}},\cdots,\lambda_{i_{k_h}};\mu_{j_{k_0}},\mu_{j_{k_1}},\cdots,\mu_{j_{k_l}}$ 分别由 $\lambda_{i_0},\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_s}$ 及 μ_{j_0}，$\mu_{j_1},\cdots,\mu_{j_t}$ 中不为 0 的数，则

$$x_1 \in \operatorname{Int} \underline{\sigma}^h = \operatorname{Int}\langle e_{i_{k_0}}, e_{i_{k_1}}, \cdots, e_{i_{k_h}} \rangle,$$

$$x_2 \in \operatorname{Int} \underline{\sigma}^l = \operatorname{Int}\langle e_{j_{k_0}}, e_{j_{k_1}}, \cdots, e_{j_{k_l}} \rangle.$$

而

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\sigma}^h = \langle e_{i_{k_0}}, e_{i_{k_1}}, \cdots, e_{i_{k_h}} \rangle \\ \underline{\sigma}^l = \langle e_{j_{k_0}}, e_{j_{k_1}}, \cdots, e_{j_{k_l}} \rangle \end{array}\right\} \in N,$$

所以

$$f(\underline{\sigma}^h) = \langle a_{i_{k_0}}, a_{i_{k_1}}, \cdots, a_{i_{k_h}} \rangle = \underline{\tau}^h \in K,$$

$$f(\underline{\sigma}^l) = \langle a_{j_{k_0}}, a_{j_{k_1}}, \cdots, a_{j_{k_l}} \rangle = \underline{\tau}^l \in K,$$

$$f(x_1) \in \operatorname{Int} \underline{\tau}^h \subset \underline{\tau}^h, f(x_2) \subset \operatorname{Int} \underline{\tau}^l \subset \underline{\tau}^l.$$

若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $f(x_1)=f(x_2)\in\underline{\tau}^h\cap\underline{\tau}^l$. 因为$\underline{\tau}^h\cap\underline{\tau}^l$ 仍是复形 K 中的一个单形，不妨令

$$\underline{\tau}^h \cap \underline{\tau}^l = \langle a_{s_1}, a_{s_2}, \cdots, a_{s_r} \rangle,$$

则

$$\{a_{s_1}, a_{s_2}, \cdots, a_{s_r}\} = \{a_{i_{k_0}}, a_{i_{k_1}}, \cdots, a_{i_{k_h}}\} \cap \{a_{j_{k_0}}, a_{j_{k_0}}, \cdots, a_{j_{k_l}}\}.$$

这样

$$f(x_1) = f(x_2) = \sum_{k=0}^{r} v_k a_{s_k} = \sum_{n=0}^{h} \lambda_{i_{k_n}} a_{i_{k_n}} = \sum_{p=0}^{l} \mu_{j_{k_p}} a_{j_{k_p}} \quad (*)$$

由重心坐标的唯一性及 $\lambda_{i_{k_n}}$ $(n=0,1,\cdots,h)$和 $\mu_{j_{k_p}}$ $(p=0,1,\cdots,l)$ 的非 0 可知

$$\{a_{s_0}, a_{s_1}, \cdots, a_{s_r}\} = \{a_{i_{k_0}}, \cdots, a_{i_{k_h}}\} = \{a_{j_{k_0}}, a_{j_{k_1}}, \cdots, a_{j_{k_l}}\},$$

从而有$\{i_{k_0},,i_{k_1},\cdots,i_{k_h}\}=\{j_{k_0},,j_{k_1},\cdots,j_{k_l}\}$.

再由$(*)$可得，a 的具有相同足码的系数应相同(相同系数具有相同足码)，从而由 x_1,x_2 的表达式可知，$x_1=x_2$，这表明

$$f: |N| \to |K|$$

是单射.

现在 $f: |N| \to |K|$ 作为从紧空间 $|N|$ 到 Hausdorff 空间 $|K|$ 的一个单满连续映射,所以

$$f: |N| \to |K|$$

是同胚,即 $|N| \cong |K|$. ■

1.4.6 推论 同构复形的多面体同胚.

习 题

1. 证明单纯映射的复合仍是单纯映射.

2. 设 $f: K \to L$ 是单纯映射,证明 $f(K)$ 是 L 的子复形.

3. 若对复形 K、L, $\exists$ 双射 $f: K^0 \to L^0$ 使得 K 的顶点 $v_0, v_1, \cdots, v_n$ 张成 K 的一单形当且仅当 $f(v_0), f(v_1), \cdots, f(v_n)$ 张成 L 的一单形,求证诱导映射 $f: |K| \to |L|$ 是一个同胚.

4. 若单纯映射 $f: K \to L$ 映单形 σ 的顶点集到单形 τ 的顶点集上. 求证诱导映射 $f: |K| \to |L|$ 将 σ 的某个面同胚地映射到 τ 上.

第 2 章　单纯同调论

2.1　有 向 单 形

2.1.1 定义　设$\underline{\sigma}^q=\langle a_0,a_1,\cdots,a_q\rangle$为 q 维单形，在$\underline{\sigma}^q$ 的全体顶点 $a_0,a_1,\cdots,a_q$ 的所有排列所构成的集合中定义一个等价关系如下：顶点的两个排列称为等价的，当且仅当这两个排列相差一个偶置换，由这个等价关系所决定的每一个等价类称作 q 维单形$\underline{\sigma}^q$ 的一个**定向**. 指定了一个定向的单形称为**有向单形**.

可见，一个有向单形是由一个单形和这个单形的一个定向这两者组成的偶对. 当 $q\geqslant 1$ 时，$\underline{\sigma}^q$ 与其两个不同的定向分别构成两个不同的有向单形. 若选择其中一个记作$+\sigma^q$(或简记作 σ^q)，则另一个可记作$-\sigma^q$. 当 $q=0$ 时，0 维单形 $\sigma^0=\langle a_0\rangle$的顶点只有一个排列，为叙述统一起见，规定$+\sigma^0$(或简记成 σ^0)与$-\sigma^0$ 为其两个有向单形.

若对单形$\underline{\sigma}^q=\langle a_0,a_1,\cdots,a_q\rangle$指定的定向是由其顶点的排列

$$a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_q}$$

所代表的等价类，则这个有向单形记作

$$a_{i_0}a_{i_1}\cdots a_{i_q}.$$

若 $a_{j_0},a_{j_1},\cdots,a_{j_q}$ 为单形$\underline{\sigma}^q$ 的顶点的另一排列，则当这二排列相差一个偶置换时，

$$a_{i_0}a_{i_1}\cdots a_{i_q}=a_{j_0}a_{j_1}\cdots a_{j_q};$$

当这两个排列相差一个奇置换时，

$$a_{i_0}a_{i_1}\cdots a_{i_q}=-a_{j_0}a_{j_1}\cdots a_{j_q},$$

或 $$-a_{i_0}a_{i_1}\cdots a_{i_q}-a_{j_0}a_{j_1}\cdots a_{j_q}.$$

q 维单形$\underline{\sigma}^q$ 的顶点与维数也分别称为有向单形$+\underline{\sigma}^q$(和$-\underline{\sigma}^q$)的顶点和维数.

2.1.2 定义 设 $\sigma^q=a_0a_1\cdots a_q$ 是 q 维有向单形,令

$$\sigma_i^{q-1}=(-1)^i a_0a_1\cdots\hat{a}_i\cdots a_q$$

(记号$\hat{a}_i$ 表示去掉 a_i),则 σ_i^{q-1} 与$-\sigma_i^{q-1}$ 都是 $q-1$ 维有向单形,分别称为有向单形 σ^q 的 $q-1$ 维**顺向面**与 $q-1$ 维**逆向面**.

例 1 设 $\sigma^1=a_0a_1$,则

$$\sigma_0^0=(-1)^0\hat{a}_0a_1=a_1,$$

$$\sigma_1^0=(-1)^1a_0\hat{a}_1=-a_0.$$

所以 a_1 和 a_0 分别是 σ^1 的顺向面和逆向面.

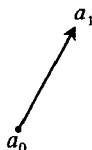


图 2.1.1

例 2 设 $\sigma^2=a_0a_1a_2$,则

$$\sigma_0^1=(-1)^0\hat{a}_0a_1a_2=a_1a_2,$$

$$\sigma_1^1=(-1)^1a_0\hat{a}_1a_2=-a_0a_2=a_2a_0,$$

$$\sigma_2^1=(-1)^2a_0a_1\hat{a}_2=a_0a_1.$$

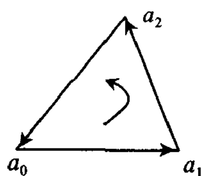


图 2.1.2

所以,a_1a_2,a_2a_0,a_0a_1 都是 $\sigma^1=a_0a_1a_2$ 的顺向面;而 a_2a_1,a_0a_2,a_1a_0 都是 $\sigma^2=a_0a_1a_2$ 的逆向面.

2.1.3 定义 设 σ^q 与 τ^{q-1}分别为 q 维,$q-1$ 维有向单形,则

$$[\sigma^q:\tau^{q-1}]:=\begin{cases}1 & \text{当 } \tau^{q-1} \text{ 是 } \sigma^q \text{ 的顺向面时;}\\ -1 & \text{当 } \tau^{q-1} \text{ 是 } \sigma^q \text{ 的逆向面时;}\\ 0 & \text{当 } \tau^{q-1} \text{ 不是 } \sigma^q \text{ 的面时.}\end{cases}$$

称其为有向单形 σ^q 与有向单形 τ^{q-1}的**关联系数**.

2.2 复形的同调群

2.2.1 定义 设$K=\{\underline{\sigma}_i^q;q=0,1,\cdots,n,i=1,2,\cdots,a_q\}$为$n$维复形,复形$K$的顶点记作$a_0,a_1,\cdots,a_{\alpha_0}$,令

$\sigma_i^0=a_i$是0维单形;

$\sigma_i^q=\underline{\sigma}_i^q$的两个有向单形中任意选定一个,它是一个$q$维有向单形.

则$\{\sigma_i^q,q=0,1,\cdots,n,i=1,2,\cdots,\alpha_q\}$称为复形$K$的有向单形的一个**基本组**.

2.2.2 定义 设K为n维复形,任意选定复形K的有向单形的一个基本组,记作

$$\{\sigma_i^q;q=0,1,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,\alpha_q\}.$$

对于整数q,当$0\leqslant q\leqslant n$时,则以

$$\{\sigma_1^q,\sigma_2^q,\cdots,\sigma_{\alpha_q}^q\}$$

为生成元集生成的自由Abel群,记作$C_q(K,Z)$或简记作$C_q(K)$(其中Z为整数加群),即

$$C_q(K)=\left\{\sum_{i=1}^{\alpha_q}\lambda_i\sigma_i^q;\lambda_i\in Z,i=1,2,\cdots,\alpha_q\right\},$$

其中加法运算规定为:对任意的$\sum\limits_{i=1}^{\alpha_q}\lambda_i\sigma_i^q,\sum\limits_{i=1}^{\alpha_q}\mu_i\sigma_i^q\in C_q(K)$有

$$\sum_{i=1}^{\alpha_q}\lambda_i\sigma_i^q+\sum_{i=1}^{\alpha_q}\mu_i\sigma_i^q=\sum_{i=1}^{\alpha_q}(\lambda_i+\mu_i)\sigma_i^q;$$

当$q<0$或$q>n$时,$C_q(K,Z)$(或简记成$C_q(K)$)定义为平凡群(即零元群),记作$C_q(K)=\{0\}$或记作$C_q(K)=0$.

对于任意整数q,$C_q(K)$称为复形K的(整系数或以Z为系数群的)q**维链群**,其元素称为复形K的q**维链**.

我们约定：

(1) 链群 $C_q(K)$ 的零元素 $\sum_{i=1}^{\alpha_q} 0\sigma_i^q$ 记成 0；

(2) 若复形 K 的 q 维链

$$c_q = 0\sigma_1^q + \cdots + 1\sigma_i^q + 0\sigma_{i+1}^q + \cdots + 0\sigma_{\alpha_q}^q,$$

则记 $c_q = \sigma_i^q$，这时也称 q 维链 c_q 为有向单形 σ_i^q.

注 复形 K 的 q 维链群 $C_q(K)$ 不依赖于 K 的基本组的选择，换言之，选择复形 K 的不同基本组，则所得到的同维链群都是同构的.

2.2.3 定义 设 $\sigma^p = a_0 a_1 \cdots a_p$ 为 p 维有向单形，令

$$\partial\sigma^p := \begin{cases} 0 & \text{当 } p = 0 \text{ 时}, \\ \sum_{i=0}^{p} (-1)^i a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_p & \text{当 } p > 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

则称 $\partial\sigma^p$ 为有向单形 σ^p 的**边缘**.

上式表明，当 $p>0$ 时，$\partial\sigma^p$ 是有向单形 σ^p 的全体顺向面之和. 设给定 n 维复形 K 的有向单形的一个基本组 $\{\sigma_i^q; q=0,1,\cdots,n; i=1,2,\cdots,\alpha_q\}$，则得

$$\partial\sigma_i^0 = 0,$$

$$\partial\sigma_i^q = \sum_{j=1}^{\alpha_{q-1}} [\sigma_i^q : \sigma_j^{q-1}]\sigma_j^{q-1} \qquad (q > 0),$$

它们是复形 K 的 $q-1$ 维链.

2.2.4 引理 设 K 是 n 维复形，对于任意的 q 维链

$$c_q = \sum_{i=1}^{\alpha_q} \lambda_i \sigma_i^q \in C_q(K)，令$$

$$\partial_q c_q = \partial_q \Big(\sum_{i=1}^{\partial_q} \lambda_i \sigma_i^q \Big) = \sum_{i=1}^{\alpha_q} \lambda_i \partial\sigma_i^q \in C_{q-1}(K).$$

则 $\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ 是群同态. 称其为 q 维**边缘算子或边缘同**

态，常常简记作∂.

证明 直接验证即得. ■

2.2.5 引理 设 K 为 n 维复形，则合成同态

$$\partial_{q-1}\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K) \to C_{q-2}(K)$$

为零同态，即$\partial_{q-1}\partial_q=0$

证明 因为群同态是线性的，所以只须对复形 K 上的任意一个有向单形

$$\sigma^q = a_0 a_1 \cdots a_q$$

验证$\partial\partial\sigma^q=0$ 即可. 事实上

$$\begin{aligned}
&\partial\partial\sigma^q \\
&= \partial\partial a_0 a_1 \cdots a_q \\
&= \partial \sum_{i=0}^{q} (-1)^i a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_q \\
&= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_q \\
&= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \Big[\Big(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j a_0 a_1 \cdots \hat{a}_j \cdots \hat{a}_i \cdots a_q \Big) \\
&\quad + \Big(\sum_{j=i+1}^{q} (-1)^{j-1} a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_q \Big) \Big] \\
&= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} a_0 a_1 \cdots \hat{a}_j \cdots \hat{a}_i \cdots a_q + \sum_{j>i} (-1)^{i+j-1} a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_q \\
&- \sum_{j<i} (-1)^{i+j} a_0 a_1 \cdots \hat{a}_j \cdots \hat{a}_i \cdots a_q + \sum_{i>j} (-1)^{i+j-1} a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots \hat{a}_j \cdots a_q \\
&= 0,
\end{aligned}$$

所以引理得证. ■

2.2.6 推论 设$\{\sigma_i^q; q=0,1,\cdots,n, i=1,2,\cdots\alpha_q\}$是复形 K 的有向单形的一个基本组，则对于有向单形 σ_i^q 与 σ_k^{q-2}，

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{q-1}} [\sigma_i^q : \sigma_j^{q-1}] \cdot [\sigma_j^{q-1} : \sigma_k^{q-2}] = 0$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant \alpha_q, 1 \leqslant k \leqslant \alpha_{q-2}$.

2.2.7 定义 设 K 为 n 维复形,令

$$Z_q(K,Z) \text{（简记作 } Z_q(K)\text{）}$$
$$= \{z_q \in C_q(K); \partial z_q = 0\} = \mathrm{Ker}\partial_q,$$

则 $Z_q(K)$ 是链群 $C_q(K)$ 的子群,称其为复形 K 的(整系数)q 维**闭链群**,其元素称为复形 K 上的 q 维**闭链**.

令

$$B_q(K,Z) \text{（或简记作 } B_q(K)\text{）}$$
$$= \{b_q \in C_q(K); \exists\, c_{q+1} \in C_{q+1}(K), \text{使 } \partial c_{q+1} = b_q\}$$
$$= \mathrm{Im}\partial_{q+1},$$

则 $B_q(K)$ 是链群 $C_q(K)$ 的子群,称其为复形 K 的(整系数)q 维**边缘链群**,其元素称为复形 K 上的 q 维**边缘链**.

由引理 2.2.5 知 $B_q(K)$ 是 $Z_q(K)$ 的子群,则商群

$$Z_q(K)/B_q(K)$$

称为复形 K 的(整系数,或以 Z 为系数群的)q 维(**单纯**)**同调群**. 简称复形 K 的 q 维**同调群**,记作 $H_q(K)$.

商群 $H_q(K)$ 的元素是 $Z_q(K)$ 中元素的模 $B_q(K)$ 的等价类,因此,由复形 K 上 q 维闭链 z_q 所决定的模 $B_q(K)$ 的等价类是 $z_q + B_q(K)$,记作 $[z_q]$,称其为 z_q 的 q 维**同调类**,并且

$$H_q(K) = \{[z_q]; z_q \in Z_q(K)\},$$

且对于任意的 $[z_q], [z'_q] \in H_q(K)$,

$$[z_q] + [z'_q] = [z_q + z'_q],$$

另外,设 $z_q, z_q' \in Z_q(K)$,则 $[z_q] - [z'_q] \Leftrightarrow z_q - z'_q \in B_q(K)$,此时称 z_q 与 z'_q 是**同调**的 q 维闭链,记作 $z_q \sim z'_q$ 或 $z_q - z'_q \sim 0$.

有时对于任意的 q 维链 $c_q, c'_q \in C_q(K)$,若 $c_q - c'_q \in B_q(K)$,则也称 c_q 与 c'_q 是同调的 q 维链,且记作 $c_q \sim c'_q$. 显然,q 维链之间

的同调关系是一个等价关系，$c_q \in C_q(K)$的同调等价类为$[c_q]=c_q+B_q(K)$，也称其为 c_q 的 q 维同调类.

注 若 K 为 n 维复形，则

1) 当 $q<0$ 或 $q>n$ 时，$H_q(K)=0$；

2) 因为 $Z_0(K)=C_0(K)$，所以 $H_0(K)=C_0(K)/B_0(K)$；

3) 因为 $B_n(K)=0$，所以 $H_n(K)=Z_n(K)$.

习　题

1. 验证当改变某一单形的定向时，其在各个面上的诱导定向也跟着改变.

2. 设 K 是 $\mathbf{R}^2$ 中的 2 维复形，求证 $Z_2(K)=0$.

3. 设 K 是 n 维复形，且它的 n 维单形数$\leqslant n+1$，证明 $Z_2(K)=0$.

4. 设 K 是连通复形，α_q 是 K 的 q 维单形的个数，则 $Z_1(K)$的秩等于 $\alpha_1-\alpha_0+1$.

5. 设 K 是由 3 维单形 σ 的所有真面构成的复形，求 $H_1(K)$ 和 $H_2(K)$.

6. i 取何值时，有

$$H_i(K^q) \cong H_i(K)?$$

7. 设 $K_0 \subset K$ 是 K 的子复形，称 $C_q(K,K_0):=C_q(K)/C_q(K_0)$为复形 K 模 K_0 的**相对链群**.

(1) 求证边缘算子$\partial: C_q(K)\to C_{q-1}(K)$诱导一同态 $\partial: C_q(K,K_0)\to C_{q-1}(K,K_0)$，称其为**相对边缘算子**；

(2) 求证上述同态满足$\partial^2=0$，从而

$$Z_q(K,K_0):=\operatorname{Ker}\partial: C_q(K,K_0)\to C_{q-1}(K,K_0)$$

$$\supset B_q(K,K_0):=\operatorname{Im}\partial: C_{q+1}(K,K_0)\to C_q(K,K_0),$$

称 $H_q(K,K_0):=Z_q(K,K_0)/B_q(K,K_0)$为复形 K 模 K_0 的 q 维**相对同调群**；

(3) 设 $K=\mathrm{Cl}\,\underline{\sigma}^n, K_0=\mathrm{Bd}\,\underline{\sigma}^n$，求 $H_q(K,K_0)$；

(4) 设 K 为一复形，K_0 由 K 的所有顶点组成，证明

$H_q(K,K_0)=H_q(K), q>0$；又问 $H_0(K,K_0)=?$

2.3 Betti 数·挠系数·Euler 示性数

设 K 为 n 维复形，对于任意整数 q，链群 $C_q(K)$ 同构于 $Z+Z+\cdots+Z$（共有 α_q 个，这里 α_q 表示 K 中 q 维单形的个数），即 $C_q(K)$ 是有限生成的自由 Abel 群，由于有限生成的自由 Abel 群的任意子群仍是有限生成的自由 Abel 群，且有限生成的 Abel 群的商群仍是有限生成的 Abel 群，故闭链群 $Z_q(K)$ 与边缘链群 $B_q(K)$ 都是有限生成的自由 Abel 群，且商群

$$H_q(K)=Z_q(K)/B_q(K)$$

是有限生成的 Abel 群. 由群论中关于有限生成的 Abel 群的基本定理，$H_q(K)$ 可唯一分解为以下形式

$$H_q(K)\simeq\underbrace{Z\oplus Z\oplus\cdots\oplus Z}_{R_q\text{个}}\oplus Z_{\theta_1(q)}\oplus Z_{\theta_2(q)}\oplus\cdots\oplus Z_{\theta_{\tau_q}(q)},$$

其中整数 R_q 满足 $0\leqslant R_q\leqslant m$（$m$ 为 $H_q(K)$ 的生成元的个数）$\theta_1(q),\theta_2(q),\cdots,\theta_{\tau_q}(q)$ 均为大于 1 的整数，且 $\theta_i(q)$ 整除 $\theta_{i+1}(q), i=1,2,\cdots,\tau_{q-1}, \tau_q\leqslant m-R_q$；而 Z 为整数加群，$Z_{\theta_i(q)}=Z/\theta_i(q)Z$ 为整数模 $\theta_i(q)$ 的同余类群，它是有限阶循环群.

2.3.1 定义 设 K 为 n 维复形，则 $H_q(K)$ 中所有有限阶元素构成的 $H_q(K)$ 的子群，称为复形 K 的 q 维**挠子群**，显然，K 的挠子群$\simeq Z_{\theta_1(q)}\oplus Z_{\theta_2(q)}\oplus\cdots\oplus Z_{\theta_{\tau_q}(q)}$ 而 $H_q(K)$/挠子群称为复形 K 的 q 维 **Betti 群**，显然 K 的 q 维 Betti 群$\simeq\underbrace{Z\oplus\cdots\oplus Z}_{R_q\text{个}}$. K 的 q 维 Betti 群的秩，即 $H_q(K)$ 的秩称为复形 K 的 q 维 **Betti 数**，数组 $\{\theta_1(q),\theta_2(q),\cdots,\theta_{\tau_q}(q)\}$ 称为复形 K 的 q 维**挠系数**.

2.3.2 定义 令

$$\chi(K) := \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\alpha_q,$$

称其为复形 K 的 **Euler-Poincarè 示性数**.

2.3.3 定理(Euler-Poincarè 公式) 设 K 为 n 维复形,则

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q R_q.$$

证明 对于任意整数 q,复形 K 上边缘同态

$$\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$$

的像为 $B_{q-1}(K)$,核为 $Z_q(K)$,所以

$$C_q(K)/Z_q(K) \cong B_{q-1}(K).$$

因此根据群的秩的可加性,$C_q(K)$的秩$=Z_q(K)$的秩$+B_{q-1}(K)$的秩.

又因为 $H_q(K)=Z_q(K)/B_q(K)$,所以有

$$Z_q(K)\text{ 的秩} = H_q(K)\text{ 的秩} + B_q(K)\text{ 的秩},$$

从而

$$C_q(K)\text{ 的秩} = H_q(K)\text{ 的秩} + B_q(K)\text{ 的秩} + B_{q-1}(K)\text{ 的秩}.$$

而 $C_q(K)$的秩$=\alpha_q$,$H_q(K)$的秩$=R_q$,于是有

$$\alpha_q = R_q + B_q(K)\text{的秩} + B_{q-1}(K)\text{的秩}.$$

所以
$$\begin{aligned}\chi(K) &= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\alpha_q \\ &= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q R_q + \sum_{q=0}^{n}(-1)^q B_q(K)\text{ 的秩} \\ &\quad + \sum_{q=0}^{n}(-1)^q B_{q-1}(K)\text{ 的秩} \\ &= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q R_q + (-1)^n B_n(K)\text{ 的秩} + B_{\ 1}(K)\text{ 的秩} \\ &= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q R_q + 0 + 0 = \sum_{g=0}^{n}(-1)^q R_q,\end{aligned}$$

即 $$\chi(K) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\alpha_0 = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q R_q. \qquad ■$$

习　题

1. 利用 Euler-Poinoaré 公式证明：树的顶点数比其 1 维单形数大 1.

2. 利用 Euler-Poincaré 公式证明关于组合数的一个公式：

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i = 0.$$

2.4　若干复形同调群的计算

2.4.1 定义　设 K 为复形，若对于复形 K 的任意两个顶点 a 与 b，存在复形 K 的顶点

$$v_1, v_2, \cdots, v_m$$

使得 $v_1=a, v_m=b$，且 $\langle v_1, v_2\rangle, \langle v_2, v_3\rangle, \cdots, \langle v_{m-1}, v_m\rangle$ 都是 K 的 1 维单形，则称复形 K 是**连通**的.

2.4.2 定理　若 K 为连通复形，则 $H_0(K)=Z$.

证明　任意取定复形 K 的一个顶点 a，对于复形 K 的任意顶点 x，因为复形 K 是连通的，所以存在复形 K 的顶点序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_m$$

使 $a_1=a, a_m=x$，且 $\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_3\rangle, \cdots, \langle a_{m-1}, a_m\rangle$ 都是复形 K 的 1 维单形.

因为

$$\partial\Big(\sum_{i=1}^{m-1} a_i a_{i+1}\Big) = \sum_{i=1}^{m-1}\partial(a_i a_{i+1}) = \sum_{i=1}^{m-1}(a_{i+1} - a_i)$$

$$= a_m - a_1 = x - a \in B_0(K).$$

又 $a, x \in Z_0(K) = C_0(K)$，所以 a 与 x 是复形 K 上同调的 0 维闭链，即 $x \sim a$.

设复形 K 的全部顶点为 $a_1, a_2, \cdots, a_{\alpha_0}$，不妨令 $a_1 = a$，对于 $z_0 = \sum_{i=1}^{\alpha_0} \lambda_i a_i \in Z_0(K) = C_0(K)$，则

$$z_0 \sim \left(\sum_{i=1}^{\alpha_0} \lambda_i\right) a.$$

另外，若某一 $z_0 = \lambda a \sim 0$，则可以证明 $\lambda = 0 \in Z$. 对于 $\lambda \in Z$，令

$$\varphi(\lambda) = [\lambda a] \in H_0(K),$$

则由上面的证明可见 $\varphi: Z \to H_0(K)$ 是同构，即

$$H_0(K) \cong Z.$$ ■

2.4.3 例子

例 1 如图 2.4.1 所示为平环的一个三角剖分，记作 K，其中 0 维单形的个数 $\alpha_0 = 6$，1 维单形的个数 $\alpha_1 = 12$，2 维单形的个数 $\alpha_2 = 6$，试计算复形 K 的各维数同调群 $H_q(K)$.

图 2.4.1 中 $\sigma_1^0 = 1, \sigma_2^0 = 2, \cdots, \sigma_6^0 = 6$；$\sigma_1^1 = 14, \cdots, \sigma_{12}^1 = 64$；$\sigma_1^2 = 154, \cdots, \sigma_6^2 = 314$.

图中 0 维单形以及箭头方向给出复形 K 的有向单形的一个基本组，记作

$$\{\sigma_i^q;\ q = 0, 1, 2;\ i = 1, 2, \cdots, \alpha_q\}$$

因为复形 K 的维数 $= 2$，故当 $q < 0$ 或 $q > 2$ 时，$H_q(K) = 0$.

又因复形 K 是连通的，所以 $H_0(K) \cong Z$.

今计算 $H_2(K)$，任取 $z_2 = \sum \lambda_i \sigma_i^2 \in Z_2(K)$，则

$$0 = \partial z_2 = \partial \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \sigma_i^2$$

$$= \lambda_1 \partial \sigma_1^2 + \sum_{i=2}^{6} \lambda_i \partial \sigma_i^2$$

$$= \lambda_1 \partial 154 + \sum_{i=2}^{6} \lambda_i \partial \sigma_i^2$$

$$= \lambda_1 (15 + 54 + 41) + \sum_{i=2}^{6} \lambda_i \partial \sigma_i^2 .$$

因为 $\sum_{i=2}^{6} \lambda_i \sigma_i^2$ 中不含有一维有向单形 $-\sigma_{10}^1 = 54$，故由 $\partial z_2 = 0$ 可得 $\lambda_1 = 0$. 同理可知 $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_6 = 0$，即 $z_2 = 0$，这表明 $Z_2(K) = 0$，从而 $H_2(K) = 0$.

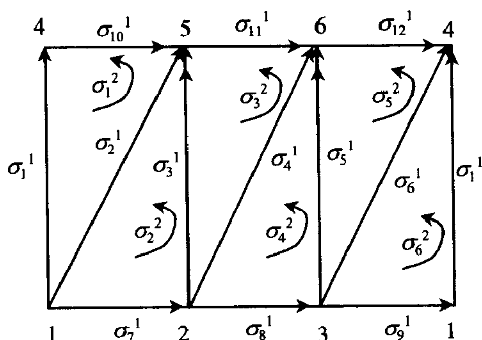


图 2.4.1

最后计算 $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K)$. 因为 $z'_1 = 12 + 23 + 31$ 和 $z''_1 = 45 + 56 + 64 \in Z_1(K)$，以及

$$\partial \sum_{i=1}^{6} \sigma_i^2 = z'_1 - z''_1 ,$$

所以 z'_1, z''_1 是复形 K 上同调的 1 维闭链. 可以证明

1) 若 $z_1 \in Z_1(K)$，则 $z_1 \sim \lambda z''_1$，其中 $\lambda \in Z$；

2) 若 $\lambda z''_1 \sim 0$，则 $\lambda = 0 \in Z$.

现在对 $\lambda \in Z$，令

$$\varphi(\lambda) = [\lambda z''_1] \in H_1(K),$$

则由上述 1)和 2)

$$\varphi : Z \to H_1(K)$$

为群同构. 总之有

$$H_q(K)=\begin{cases}0 & q\neq 0,1;\\ Z & q=0,1.\end{cases}$$

例 2 将 $\boldsymbol{R}^2$ 中长方形域 $ABA'B'$ 的一对对边 AB 与 $A'B'$ 沿着箭头指示的方向迭合起来所得到的商空间,称为 Möbius 带. 设 K 为如图 2.4.2 所示的 Möbius 带的一个单纯剖分,则

$$H_q(K)=\begin{cases}Z & q=0,1;\\ 0 & q\neq 0,1.\end{cases}$$

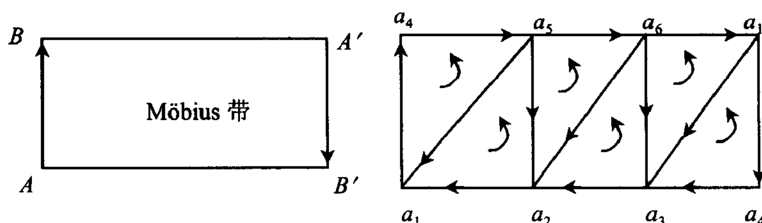


图 2.4.2

证明 与例 1 类似,这里从略. ■

例 3 设 K 为如图 2.4.3 所示的射影平面 P^2 的一个三角剖分,试计算复形 K 的各维数同调群 $H_q(K)$.

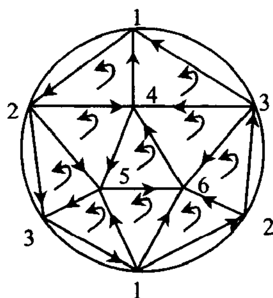


图 2.4.3

如图 2.4.3 所示,K 中的 0 维单形以及图中箭头方向给出复

形 K 的有向单形的一个基本组

$$\{\sigma_i^q;\ q=0,1,2;\ i=1,2,\cdots,\alpha_q\}$$

其中 $\sigma_1^0=1,\sigma_2^0=2,\cdots,\sigma_6^0=6;\sigma_i^1=12,\cdots,\sigma_{15}^1=56;\sigma_1^2=126,\cdots,\sigma_{10}^2=456$.

当 $q<0$ 或 $q>2$ 时,显然有 $H_q(K)=0$;又因 K 是连通复形,所以 $H_0(K)\cong Z$.

下面计算 $H_2(K)=Z_2(K)$,任取 $z_2=\sum_{i=1}^{10}\lambda_i\sigma_i^2\in Z_2(K)$.
由于取定的复形 K 的有向单形的基本组中位于图中中间位置的那些 1 维有向单形的每一个恰是两个 2 维有向单形的面,以及$\partial z_2=0$,所以出现在 $z_2=\sum_{i=1}^{10}\lambda_i\sigma_i^2$ 中的系数 λ_i 必须都相等,即

$$\lambda_i=\lambda\ (i=1,2,\cdots,10)$$

亦即有 $z_2=\lambda\sum_{i=1}^{10}\sigma_i^2$,于是

$$\partial z_2=\lambda\sum_{i=1}^{10}\partial\sigma_i^2=2\lambda(12+23+31)=0$$

从而 $\lambda=0\in Z$,所以有 $z_2=0$.

以上表明

$$H_2(K)=Z_2(K)=0.$$

最后计算 $H_1(K)=Z_1(K)/B_1(K)$.

记 $z_1^0=12+23+31\in Z_1(K)$,则可以证明

1) 若 $z_1\in Z_1(K)$,则 $z_1\sim\lambda z_1^0$,其中 $\lambda\in Z$,即 z_1 与 λz_1^0 是复形 K 上同调的 1 维闭链;

2) $\lambda z_1^0\sim 0$,即 $\lambda z_1\in B_1(K)$,其中 $\lambda\in Z\Leftrightarrow\lambda=2\mu,\mu\in Z$.

于是,对 $\lambda\in Z$,令

$$\varphi(\lambda)=[\lambda z_1^0]\in H_1(K),$$

则 $\varphi:Z\to H_1(K)$是满同态,从而由同态基本定理,

$$\varphi^*:Z/\mathrm{Ker}\varphi\cong H_1(K).$$

由上面证明 $\mathrm{Ker}\varphi=2Z$，因此

$$H_1(K)\cong Z_2=Z/2Z.$$

总之有

$$H_q(K)=\begin{cases}Z & q=0;\\ Z_2 & q=1;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

例 4 设 K 为如图 2.4.4 所示的环面 T^2 的一个单纯剖分，试计算复形 K 的各维数同调群 $H_q(K)$.

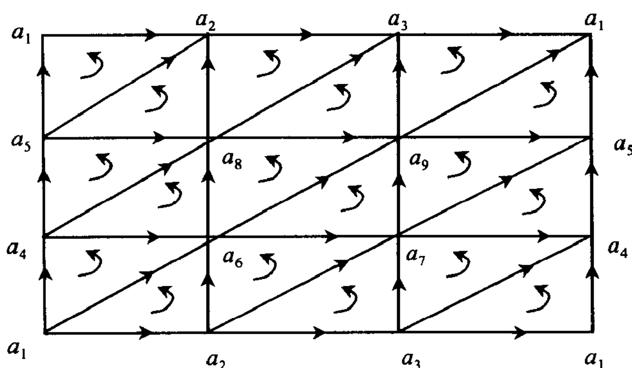


图 2.4.4

图 2.4.4 中 0 维单形以及箭头所示方向给出复形 K 的有向单形的一个基本组

$$\{\sigma_i^q;\ q=0,1,2;\ i=1,2,\cdots,\alpha_q\},$$

其中 $\alpha_0=9,\alpha_1=27,\alpha_2=18$；$\sigma_1^0=a_1,\cdots,\sigma_9^0=a_9,\sigma_1^1=a_1a_2,\cdots,\sigma_{27}^1=a_5a_1$；$\sigma_1^2=a_1a_2a_6,\cdots,\sigma_{18}^2=a_5a_2a_1$.

显然对于如此选取的基本组

$$\{\sigma_i^q;\ q=0,1,2;\ i=1,2,\cdots,\alpha_q\},$$

其中每一个 1 维有向单形恰是其中两个 2 维有向单形的面，并且为其中一个的顺向面，而为另一个的逆向面.

当 $q<0$ 或 $q>2$ 时，显然有 $H_q(K)=0$，又因复形 K 是连通

的，所以 $H_0(K)\cong Z$.

下面计算 $H_2(K)=Z_2(K)$. 记 $z_2^0=\sum_{i=1}^{18}\sigma_i^2$，则

$$\partial z_2^0=\sum_{i=1}^{18}\partial\sigma_i^2=0$$

故 $z_2^0\in Z_2(K)$，对于任意的 $z_2\in Z_2(K)$，则由选取的基本组之特点可知

$$z_2=\lambda z_2^0=\lambda\sum_{i=1}^{18}\sigma_i^2.$$

今对任意 $\lambda\in Z$，令

$$\varphi(\lambda)=\lambda z_2^0,$$

则

$$\varphi: Z\to Z_2(K)=H_2(K)$$

是群同构，故

$$H_2(K)\cong Z.$$

再计算 $H_1(K)=Z_1(K)/B_1(K)$. 记

$$z'_1=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1,$$
$$z''_1=a_1a_4+a_4a_5+a_5a_1,$$

则 $z'_1,z''_1\in Z_1(K)$，且可以证明

1) 若 $z_1\in Z_1(K)$，则 $z_1\sim\lambda_1z'_1+\lambda_2z''_1,\lambda_1,\lambda_2\in Z$，即 z_1 与 $\lambda_1z'_1+\lambda_2z''_1$ 是复形 K 上同调的 1 维闭链；

2) 若 $\lambda_1z'_1+\lambda_2z''_1\sim 0$，其中 $\lambda_1,\lambda_2\in Z$，即 $\lambda_1z'_1+\lambda_2z''_1\in B_1(K)$，则 $\lambda_1=\lambda_2=0\in Z$.

现在，对 $\lambda_1,\lambda_2\in Z$，令

$$\varphi(\lambda_1,\lambda_2)=[\lambda_1z'_1+\lambda_2z''_1]\in H_1(K),$$

则

$$\varphi: Z\oplus Z\to H_1(K)$$

是群同构，即

$$H_1(K)\cong Z\oplus Z.$$

总之有

$$H_q(K)=\begin{cases} Z & q=0,2; \\ Z\oplus Z & q=1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

例 5 设 K 为如图 2.4.5 所示的 2 维球面 S^2 的一个单纯剖分,则

$$H_q(K)=\begin{cases} Z & q=0,2; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

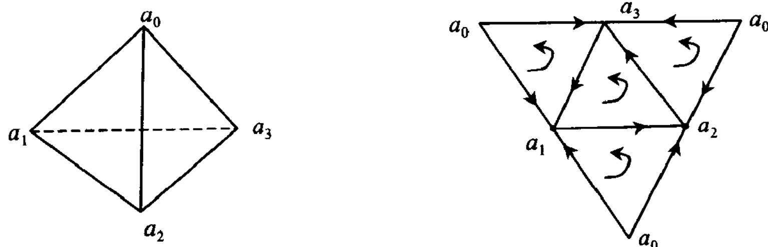


图 2.4.5

证明 与上题类似,这里从略. ■

用类似的方法还可得到:

例 6 将长方形区域(如图 2.4.6 所示)$ABA'B'$的左右两边 AB,$A'B'$及上下两边BA'与AB'沿着箭头指示的方向迭合起来所得到的商空间称为 Klein 瓶. 设 K 为如图所示的 Klein 瓶的一个单纯剖分,则

$$H_q(K)=\begin{cases} Z & q=0; \\ Z\oplus Z_2 & q=1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

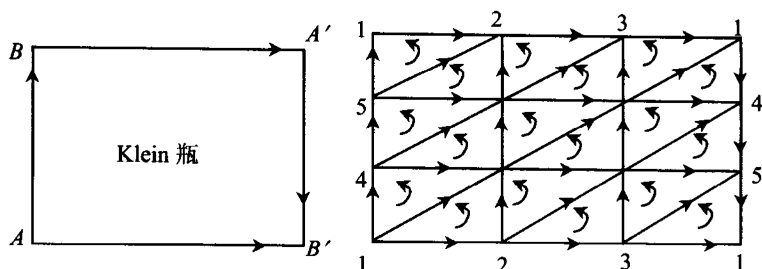


图 2.4.6

习　题

1. 若 $K=K_1\cup K_2$，且 $K_0=K_1\cap K_2$ 是 r 维的，则 $H_q(K)\cong H_q(K_1)\oplus H_q(K_2)$，$\forall q>r+1$，从而若 $K=K_1\cup K_2$，$K_0=K_1\cap K_2$ 是一顶点，则 $H_q(K)\cong H_q(K_1)\oplus H_q(K_2)$，$\forall q>1$.

2. 设 $K=K_1\cup K_2$，$K_0=K_1\cap K_2\neq\varnothing$，求证

(1) 若 K_0 连通，则对 $\forall z\in Z_1(K)$，必 $\exists z_i\in Z_1(K_i)$，$i=1,2$，使 $z=z_1+z_2$；

(2) 若 $H_{q-1}(K_0)=0$，则对 $\forall z\in Z_q(K)$，必 $\exists z_i\in Z_q(K_i)$，$i=1,2$，使 $z=z_1+z_2$；

(3) 若 $H_q(K_0)=0$，$z_i\in Z_q(K_i)(i=1,2)$，使 z_1+z_2 在 K 中同调于 0，则 z_i 在 K_i 中亦同调于 0，$i=1,2$.

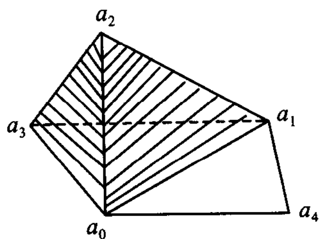
3. 设 $K=\mathrm{Bd}(a_0,a_1,a_2,a_3)\cup\mathrm{Bd}(a_0,a_1,a_4)$，求 $H_q(K)=?$

4. 设 $K=\mathrm{Bd}(a_0,a_1,a_2,a_3)\cup\mathrm{Bd}(a_0,a_1,a_2,a_4)$，求 $H_q(K)=?$

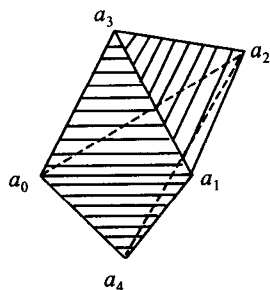
5. 求如图所示的“5 折尖帽”的 1 维和 2 维同调群. 你能将习题 5 再推广吗？

6. 求树的同调群.

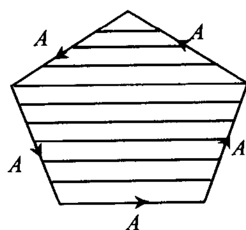
7. 若一复形 K：(1)是两中空的四面体沿一条棱焊接；(2)是



（第 3 题图）



（第 4 题图）



（第 5 题图）

圆柱面的单纯剖分，试分别求 $H_q(K)=?$

2.5 伪 流 形

2.5.1 定义 设 K 为 n 维复形，若满足

(1)对于复形 K 中任意 q 维单形$\underline{\sigma}^q$，存在复形 K 中的一个 n 维单形$\underline{\tau}^n$，使得$\underline{\sigma}^q \leqslant \underline{\tau}^n$，即$\underline{\sigma}^q$ 是$\underline{\tau}^n$ 的一个面；

(2) 对于复形 K 中任意一个 $n-1$ 维单形$\underline{\sigma}^{n-1}$，在复形 K 中至多存在两个 n 维单形$\underline{\tau}_1^n$ 与$\underline{\tau}_2^n$，使$\underline{\sigma}^{n-1} < \underline{\tau}_1^n$ 且$\underline{\sigma}^{n-1} < \underline{\tau}_2^n$；

(3)对于复形 K 中任意两个 n 维单形$\underline{\tau}_1^n$、$\underline{\tau}_2^n$，在复形 K 中存在 n 维单形序列：

$$\underline{\sigma}_1^n, \underline{\sigma}_2^n, \cdots, \underline{\sigma}_k^n,$$

使得$\underline{\sigma}_1^n = \underline{\tau}_1^n$，$\underline{\sigma}_k^n = \underline{\tau}_2^n$，且$\underline{\sigma}_i^n \cap \underline{\sigma}_{i+1}^n (i=1,2,\cdots,k-1)$都是复形 K 中的 $n-1$ 维单形.

则称复形 K 为 n 维**伪流形**. 若 n 维伪流形还满足条件：

(2)* 对于复形 K 中任意一个 $n-1$ 维单形$\underline{\sigma}^{n-1}$，在复形 K 中恰有两个 n 维单形$\underline{\tau}_1^n$ 与$\underline{\tau}_2^n$，满足

$$\underline{\sigma}^{n-1} < \underline{\tau}_1^n, \underline{\sigma}^{n-1} < \underline{\tau}_2^n,$$

则称复形 K 为 n 维**闭伪流形**；不是闭伪流形的伪流形称为**带边伪流形**.

显然，在 2.4 节提到的 2 维球面 S^2、射影平面 P^2、环面 T^2 及 Klein 瓶的单纯剖分都是二维闭伪流形；而 n 维单形$\underline{\sigma}^n(n>0)$的闭包复形 Cl $\underline{\sigma}^n$ 却是带边 n 维伪流形，其边缘复形 Bd $\underline{\sigma}^n(n>1)$是 $n-1$维闭伪流形.

2.5.2 定义 设 K 为 n 维伪流形，若 K 存在有向单形的基本组，满足：对于这个基本组中任意一个 $n-1$ 维有向单形σ^{n-1}，若它是这个基本组中的两个不同的 n 维有向单形σ_1^n 与 σ_2^n 的有向面，且

$$[\sigma_1^n : \sigma^{n-1}] = -[\sigma_2^n : \sigma^{n-1}],$$

那么称 n 维伪流形 K 是**能定向的**；否则，称 n 维伪流形是**不能定向的**.

显然，平环、二维球面 S^2 和环面 T^2 等的单纯剖分，以及 n 维单形 $\underline{\sigma}^n$ 的闭包复形 $\mathrm{Cl}\,\underline{\sigma}^n$ 都是能定向的伪流形；而 Möbius 带、射影平面 P^2 以及 Klein 瓶等的单纯剖分都是不能定向的伪流形.

2.5.3 定理 设 K 是 n 维闭伪流形，则

(1) K 能定向 $\Leftrightarrow H_n(K)\cong Z$；

(2) K 不能定向 $\Leftrightarrow H_n(K)=0$.

证明

(1) 设 n 维闭伪流形是能定向的，则可选取 K 的有向单形的一个基本组：

$$\{\sigma_i^q;\ q=0,1,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,\alpha_q\},$$

使得对于其中任意一个 $n-1$ 维有向单形恰是其中两个 n 维有向单形的有向面，且为其中一个的顺向面，为另一个的逆向面. 令

$$z_n^0=\sum_{i=1}^{\alpha_n}\sigma_i^n,$$

则 $\partial z_n^0=0$.

若 $z_n\in Z_n(K)$，则由所取的基本组的特性知，$z_n=\lambda z_n^0=\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^n$，其中 $\lambda\in Z$，所以

$$H_n(K)=Z_n(K)\cong Z.$$

反之，若 $H_n(K)=Z$，则任取定 K 的有向单形的一个基本组

$$\{\sigma_i^q;\ q=0,1,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,\alpha_q\}.$$

因为 $Z_n(K)=H_n(K)\cong Z$，故可取到

$$z_n=\sum_{i=1}^{\alpha_n}\lambda_i\sigma_i^n\in Z_n(K),$$

使得 $z_n\neq 0$，又由于

$$0=\partial z_n=\sum_{i=1}^{\partial_n}\lambda_i\partial\sigma_i^n=\sum_{i=1}^{\alpha_n}\lambda_i\sum_{j=1}^{\alpha_{n-1}}[\sigma_i^n:\sigma_j^{n-1}]\sigma_j^{n-1},$$

所以上式右边合并同类项后记作

$$\sum_{k=1}^{\alpha_{n-1}}\mu_k\sigma_k^{n-1}=0\Rightarrow\mu_k=0,k=1,2,\cdots,\alpha_{n-1}.$$

再利用闭伪流形的性质(2)* 与(3)可得

$$0=\mu_k=\lambda_h-\lambda_l\text{ 或 }\lambda_h+\lambda_l\text{ 或 }-\lambda_h+\lambda_l\text{ 或 }-\lambda_h-\lambda_l,$$

其中 $1\leqslant h,l\leqslant\alpha_n$.

又 $|\lambda_i|=\nu_i>0$, $i=1,2,\cdots,\alpha_n$,令

$$\tau_i^n=\frac{\nu_i}{\lambda_i}\sigma_i^n,\qquad i=1,2,\cdots,\alpha_n.$$

将 τ_i^n 替换所选取的 K 的有向单形的基本组中的 σ_i^n, $i=1,2,\cdots,\alpha_n$,其余的有向单形不变.于是得到 K 的有向单形的一个基本组,由此不难看出 n 维闭伪流形是能定向的.

(2) 设 K 不能定向,而 $H_n(K)\neq0$,则可取

$$z_n=\sum_{i=1}^{\alpha_n}\lambda_i\sigma_i^n\in Z_n(K),$$

使得 $z_n\neq0$.

由于 $\partial z_n=0$,则从闭伪流形的定义不难得出:对于 $z_n=\sum_{i=1}^{\alpha_n}\lambda_i\sigma_i^n$ 中任意两个系数 λ_h,λ_k,必有 $\lambda_h=\lambda_k$ 或 $\lambda_h=-\lambda_k$,于是记 $\nu_i=|\lambda_i|>0$, $i=1,2,\cdots,\alpha_n$, 且令

$$\tau_i^n=\frac{\lambda_i}{\nu_i}\sigma_i^n,$$

所以

$$z_n=\sum_{i=1}^{\alpha_n}\lambda_i\sigma_i^n=\sum_{i=1}^{\alpha_n}\lambda_i\frac{\nu_i}{\lambda_i}\tau_i^n=\sum_{i=1}^{\alpha_n}\nu_i\tau_i^n.$$

将 $\tau_i^n(i=1,2,\cdots,\alpha_n)$替换 K 的有向单形的基本组中的 σ_i^n,则表明 K 是能定向的,这与题设矛盾.故必有 $H_n(K)=0$.

定理中余下部分的结论是明显的. ■

2.5.4 定理 设 K 是二维闭伪流形，记 α_q 为复形 K 的 q 维单形的个数，$q=0,1,2$，则

(1) $3\alpha_2=2\alpha_1$；

(2) $\alpha_1=3(\alpha_0-\chi(K))$；

(3) $\alpha_0\geqslant\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{49-24\chi(K)}\right)$.

证明

(1)因每一个 2 维单形恰有三个 1 维单形作为其 1 维面，而每个 1 维单形恰是两个 2 维单形的 1 维面，所以

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\cdot 3\alpha_2,$$

即
$$3\alpha_2=2\alpha_1.$$

(2) $\chi(K)=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=\alpha_0-\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_1=\alpha_0-\frac{1}{3}\alpha_1$,

即
$$\alpha_1=3(\alpha_0-\chi(K)).$$

(3)因为每两个 0 维单形至多确定一个 1 维单形，所以

$$\alpha_1\leqslant C_{\alpha_0}^2=\frac{\alpha_0!}{2!(\alpha_0-2)!}=\frac{1}{2}\alpha_0(\alpha_0-1).$$

由(2)可得

$$3(\alpha_0-\chi(K))\leqslant\frac{1}{2}\alpha_0(\alpha_0-1),$$

即

$$\alpha_0^2-7\alpha_0\geqslant-6\chi(K)\Rightarrow 4\alpha_0^2-28\alpha_0\geqslant-24\chi(K)$$
$$\Rightarrow 4\alpha_0^2-28\alpha_0+49\geqslant 49-24\chi(K).$$

所以
$$(2\alpha_0-7)^2\geqslant 49-24\chi(K).$$

由于 K 是 2 维闭伪流形，因此 $\alpha_2>1$，从而 $\alpha_0>3$，所以

$$2\alpha_0-7>0.$$

另一方面，从 K 是连通的可知(可证：伪流形是连通复形)

$$\chi(K)=R_0-R_1+R_2\leqslant 1-R_1+1\leqslant 2,$$

即

$$49-24\chi(K)>0,$$

所以有

$$2\alpha_0-7\geqslant\sqrt{49-24\chi(K)},$$

即

$$\alpha_0\geqslant\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{49-24\chi(K)}\right).$$

2.6 单纯同调群拓扑不变性定理的陈述·简单应用

这里我们只给出同调群的拓扑不变性定理的叙述，其证明，读者可参阅书后所列的参考文献[2].

2.6.1 定理（单纯同调群拓扑不变性定理） 设 K、L 为二复形，若 $|K|\cong|L|$，则

$$H_q(K)\cong H_q(L),\qquad q=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

可见，若 K 与 L 是同一可剖空间的两个单纯剖分，则同维数同调群同构，即

$$H_q(K)\cong H_q(L)\qquad q=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

所以若不计较群的同构（即同构的群看成同一个群），则由定理 2.6.1 可引入如下定义：

2.6.2 定义 设 X 为可剖拓扑空间，K 是 X 的任意一个单纯剖分，令

$$H_q(X,Z)=H_q(K,Z),$$

简记成 $H_q(X)$，$q=0,\pm1,\cdots$，称其为可剖空间 X 的的 q **维整系数同调群**.

类似地，我们将复形 K 的 q 维 Betti 数，q 维挠系数和 Euler-

Poincarè 示性数分别称为可剖空间 X 的 q 维 **Betti 数**，q 维**挠系数**和 **Euler-Poincarè 示性数**.

综合 2.4 节已计算过的复形同调群可得下表：

空　间	Betti 数	Euler 示性数	挠系数
1. 平环	$R_0=1,R_1=1,R_2=0$	0	无
2. Mobius 带	$R_0=1,R_1=1,R_2=0$	0	无
3. 二维球面 S^2	$R_0=1,R_1=0,R_2=1$	2	无
4. 环面 T^2	$R_0=1,R_1=2,R_2=1$	0	无
5. 射影平面 P^2	$R_0=1,R_1=0,R_2=0$	1	只有一个 1 维挠系数=2
6. Klein 瓶	$R_0=1,R_1=1,R_2=0$	0	只有一个 1 维挠系数=2

由定理 2.6.1 可知，同胚的可剖空间相同维数同调群同构. 因而，若两个可剖空间某一维数的同调群非同构则可断定这二拓扑空间必不同胚，所以同调群是判别两个可剖空间不同胚的一个工具. 从上表可看出：除了平环与 Möbius 带这一对空间不能由同调群来判别它们是不同胚外，其他的任一对空间都不同胚. 此外，我们还有

2.6.3 定理　设 $m\neq n$，则

(1) m 维球 S^m 与 n 维球面 S^n 不同胚；

(2) m 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 与 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 不同胚.

证明

(1) 由于对 S^0 而言，$K=\{a_0,a_1\}$，故 $Z_0(K)=Z\oplus Z$，

所以有
$$H_q(K)=\begin{cases}Z\oplus Z & q=0,\\ 0 & q\neq 0.\end{cases}$$

当 $k>0$ 时，可以证明
$$H_q(S^k)=\begin{cases}Z & q=0,k,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

可见，当 $m \neq n$ 时，S^m 与 S^n 不能同胚.

(2) 由一般拓扑学知识可知，S^m，S^n 分别是 $\mathbf{R}^m$ 与 $\mathbf{R}^n$ 的加一点紧化，若当 $m \neq n$ 时，$\mathbf{R}^m \cong \mathbf{R}^n$，则必有 $S^m \cong S^n$，这与(1)矛盾. ■

2.6.4 定理 设大圆弧将 2 维球面 S^2 划分成(弯曲)多面形，若满足

(1)每一面都是(弯曲)n 边形($n \geqslant 3$)；

(2) 每一个顶点都是 m 条棱(大圆弧)的公共端点($m \geqslant 3$).

则这样的多面形只有五种.

证明 设 V，E，F 分别表示如此多面形的顶点数、棱数和面数，对多面形作适当的三角剖分(如图 2.6.1 所示，将每一个 n 边形剖分成 n 个三角形)，可得

$$\begin{aligned} V - E + F &= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(S^2) \\ &= R_0 - R_1 + R_2 \\ &= 2 \end{aligned} \qquad (*)$$



图 2.6.1

所以得

$$V - E + F = 2.$$

但据题设

$$nF = 2E = mV,$$

即 $V = \frac{n}{m}F$，$E = \frac{n}{2}F$，将其代入(＊)便得

$$\frac{n}{m}F - \frac{n}{2}F + F = 2,$$

即

$$\frac{2n - mn + 2m}{2m} \cdot F = 2 \Rightarrow 2n - mn + 2m > 0.$$

因为 $n \geqslant 3$，于是得

$$2m > n(m-2) \geqslant 3(m-2) = 3m - 6$$

即 $m<6$，且 m 为正整数，所以据关系式

$$F(2m - mn + 2n) = 4m$$

得(m, n, F)的可能值列入下表：

m	3	3	3	4	5
n	3	4	5	3	3
F	4	6	12	8	20

此表格说明，这样的多面形只有 5 种，即 4、6、8、12、20 面形.

习　　题

1. 利用球极投影是 $\boldsymbol{R}^n$ 与 $S^n \backslash \{x_0\}$ 的同胚，重新证明

$$\boldsymbol{R}^m \cong \boldsymbol{R}^n \Leftrightarrow m = n.$$

2. 求证：若二闭流形同胚，则其维数必相同.
3. 求证流形的内部与边界不交.

第 3 章　曲面的拓扑分类

3.1　曲　　面

3.1.1 定义　设 X 为 Hausdorff 空间，若对于 X 的每一点都有邻域同胚于 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$，则称 X 为 n 维**流形**. 若对于 X 的每一点，或有邻域同胚于 $\mathbf{R}^n$，或有邻域同胚于

$$\mathbf{R}^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n ; x_1 \geqslant 0\},$$

则称 X 为 n 维**带边流形**.

3.1.2 定义　2 维流形或 2 维带边流形均称为**曲面**. 换言之，所谓曲面是一个 Hausdorff 空间，它的每一点都有邻域同胚于 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^2_+$.

一个曲面 X 的**内部**是由所有那种称为**内点**的点构成，即这些点都有同胚于 $\mathbf{R}^2$ 的邻域. 若曲面 X 的点 x 有邻域 U，以及同胚 $\varphi: U \to \mathbf{R}^2_+$，使 $\varphi(x)=0$，则称点 x 为 X 的**边界点**. X 的全体边界点构成 X 的**边界**，用 ∂X 表示. 显然，$\mathrm{Int}X \cap \partial X = \varnothing$，且曲面的内部与边界在拓扑变换下保持不变，即拓扑变换把一个曲面的内部与边界分别变换成另一曲面的内部与边界.

3.1.3 定义　一个连通紧致的没有边界的曲面称为**闭曲面**. 换言之，闭曲面是一个连通紧致的 Hausdorff 空间，并且它的每一点都有邻域同胚于欧氏平面 $\mathbf{R}^2$.

不难看出，球面 S^2，射影平面 P^2，环面 T^2 以及 Klein 瓶都是闭曲面，而平环(圆柱面)与 Möbius 带都是带边曲面.

3.1.4 定义 设 X_1, X_2 为二闭曲面，任意选定两个 2 维圆盘 $D_1 \subset X_1, D_2 \subset X_2$，令 $X_1{}' = X_1 \setminus \mathrm{Int}D_1$，$X_2{}' = X_2 \setminus \mathrm{Int}D_2$，以及同胚 $\varphi: \partial D_1 \to \partial D_2$，则在并空间 $X'_1 \cup X'_2$ 中，将 ∂D_1 上的点 x 与其像点 $\varphi(x)$ 粘合在一起所得到的商空间称为闭曲面 X_1 与 X_1 的**连通和(连接和)**，记作 $X_1 \# X_2$.

闭曲面的连通和具有下列性质：

设 X_1, X_2, X_3 为闭曲面，则

(1) $X_1 \# X_2$ 仍是闭曲面；

(2) $X_1 \# X_2 = X_2 \# X_1$；

(3) $X_1 \# (X_2 \# X_3) = (X_1 \# X_2) \# X_3$；

(4) $X_1 \# S^2 = X_1$.

显然，闭曲面的连通和提供了从已知闭曲面构造新曲面的一种方法.

习　题

1. 证明流形是局部道路连通和局部紧的.

2. 证明流形的内部是该流形之开集.

3. 在 $\boldsymbol{R}^1$ 中规定等价关系如下

(1) $x \sim x, |x| \leqslant 1$ 时，(2) $x \sim -x \quad |x| > 1$ 时，试问 $\boldsymbol{R}^1/\sim$ 是否为流形，为什么？

4. 设 $X = S^2 \cup \{P\}$ $(P \notin S^2)$，且规定 S^2 里点的邻域如同平常，而 P 的邻域是形如 $[U \setminus (0,0,1)] \cup \{P\}$ 的集合，这里 U 是 $(0,0,1)$ 在 S^2 中的邻域. 试问 X 还是曲面吗？为什么？

5. 证明闭曲面的连通和性质 1-4.

3.2 闭曲面拓扑分类定理的陈述

3.2.1 定理(闭曲面拓扑分类定理) 任何闭曲面或同胚于球面,或同胚于有限个环面的连通和,或同胚于有限个射影平面的连通和;这三种曲面中的任意两个都是不同胚的.

上述定理表明所有闭曲面可分为三大类:

(1)球面;

(2) 有限个环面的连通和;

(3)有限个射影平面的连通和.

注 分类定理的证明将在下节给出,它需借助于构造标准闭曲面的模型,及其标准符号表示式,我们现在先为此作些准备.

3.2.2 闭曲面的符号表示式

1. 环面的连通和

将欧氏平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中的矩形(如图 3.2.1 所示)沿箭头指示的方向成对地粘合对应边所得到的商空间即为环面.

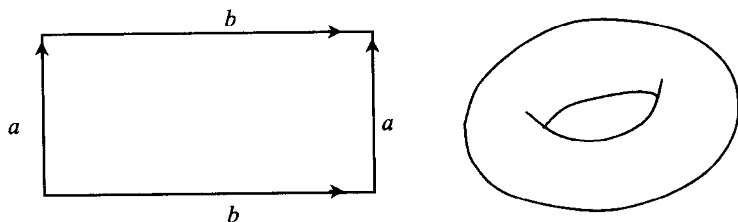


图 3.2.1 环面 T^2

设 T_1,T_2 为两个环面,为了得到环面 T_1 与 T_2 的连通和,首先在环面 T_1 与 T_2 上分别挖去一个洞 $\text{Int}D_1$ 与 $\text{Int}D_2$,它们的边界分别为 C_1 和 C_2,然后将各挖去一个洞的环面,即 $T_1\setminus\text{Int}D_1$ 与 $T_2\setminus\text{Int}D_2$沿箭头指示的方向把 C_1 与 C_2 粘合起来,这样所得到的

商空间即为环面 T_1 与 T_2 的连通和 $T_1 \# T_2$，所以两个环面的连通和可以看作由一个八边形沿着箭头指示的方向成对地粘合其对应边所得到的商空间(如图 3.2.2).

用同样的方法可构造出 n 个环面 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 的连通和 $T_1 \# T_2 \# \cdots \# T_n$，即由 $4n$ 边形沿着箭头指示的方向成对地粘合其对应边所得到的商空间(如图 3.2.3 所示).

2. 射影平面的连通和

将圆盘 D^2 中边界上的对径点粘合起来所得到的商空间即为射影平面 P^2，换句话说，将一个弯曲两边形(同胚于圆盘 D^2)的对边反向粘合起来所得到的商空间就是射影平面(如图 3.2.4 所示).

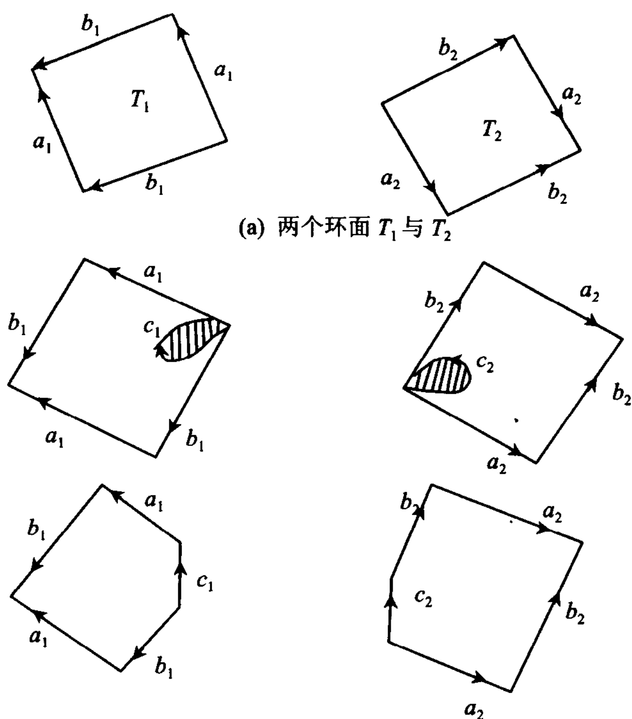
设 P_1, P_2 为两个射影平面，为了得到 P_1 与 P_2 的连通和，首先在射影平面 P_1、P_2 上分别挖去一个洞 $\mathrm{Int}D_1$ 与 $\mathrm{Int}D_2$，洞的边界分别为 c_1 和 c_2，然后将各挖去一个洞的射影平面，即 $P_1 \setminus \mathrm{Int}D_1$ 与 $P_2 \setminus \mathrm{Int}D_2$ 沿着箭头指示的方向把 c_1 与 c_2 粘合起来，这样所得到的商空间即为射影平面 P_1 与 P_2 的连通和 $P_1 \# P_2$(如图 3.2.5 所示). 所以两个射影平面的连通和可以看作由一个四边形沿着箭头指示的方向成对粘合其对应边所得到的商空间.

用同样的方法可构造出 n 个射影平面 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的连通和 $P_1 \# P_2 \# P_3 \# \cdots \# P_n$，即由 $2n$ 边形沿着箭头指示的方向成对粘合其对应边所得到的商空间(如图 3.2.6 所示).

最后，球面可看成顺向粘合二边形的对边而形成的商空间(如图 3.2.7 所示).

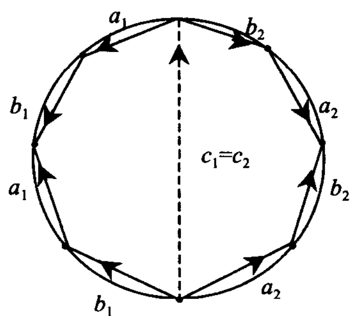
综合以上考察可知，分类定理中提及的闭曲面都可以看作由一个多边形将其边成对地粘合起来所得到的商空间，从而对这些闭曲面可以引入一种方便的表示，其方法如下：

首先对多边形任意指定一个周向(如逆时针方向)，其次对多边形的边都标上字母，如 $a, b, c \cdots$，相互粘合的边标以相同字母，不是粘合的边标以不同字母，并且对每条边都指定一方向(用箭头



(a) 两个环面 T_1 与 T_2

(b) 各挖去一个洞的两个环面



(c) 两个环面 T_1 与 T_2 的连通和

图 3.2.2

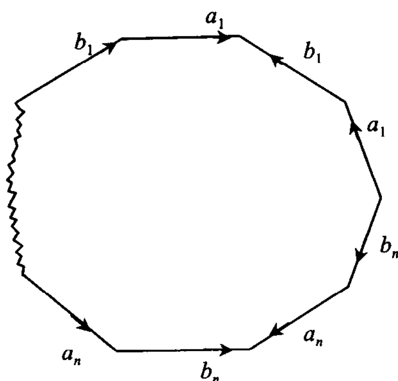


图 3.2.3　n 个环面的连通和

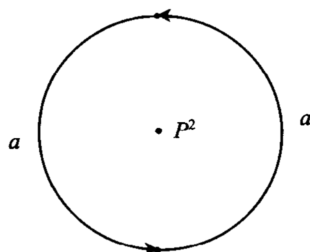


图 3.2.4　射影平面 P^2

表示)，以表示对应边的粘合方式，如果边的指向同多边形的周向一致，则在表示该边字母的右上角标以+1(或不标记)，否则，则在表示该边字母的右上角标以−1，最后沿着多边形指定的周向依次写出带有上标的字母，从而便得出分类定理中闭曲面的符号表示式

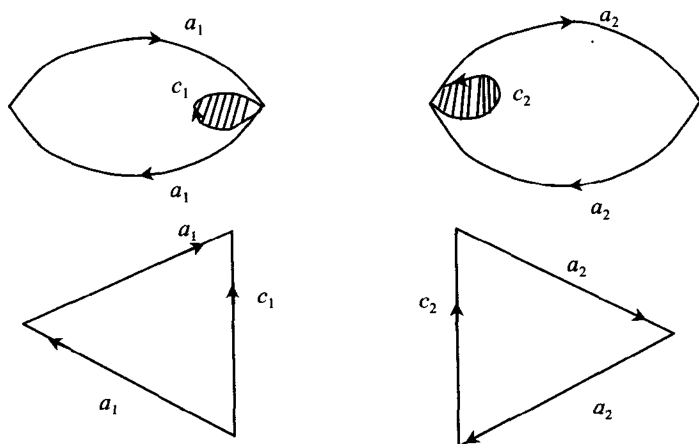
(1) 球面 S^2　aa^{-1}；

(2) n 个射影平面的连通和 $P_1 \# P_2 \# \cdots \# P_n$：

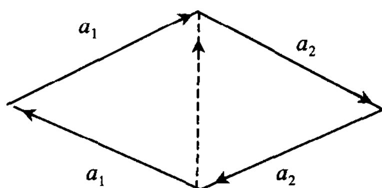
$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n;$$

(3) n 个环面的连通和 $T_1 \# T_2 \# \cdots \# T_n$：

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}.$$



(a) 各挖去一个洞的二射影平面



(b) 两个射影平面的连通和

图 3.2.5

反之,如此符号表示式也确定相应的闭曲面,所以上述表示式称为相应闭曲面符号表示式的**标准形式**.

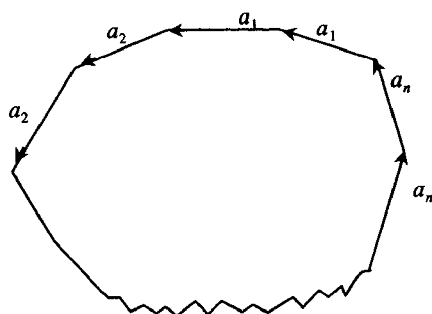


图 3.2.6 n个射影平面的连通和

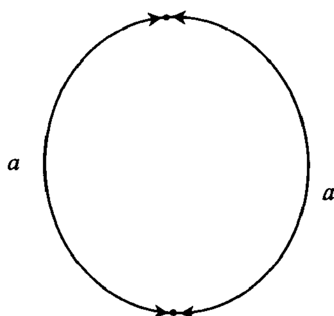


图 3.2.7 球面

习 题

1. 证明:射影平面与自己的连通和是 Klein 瓶.

2. 环面与射影平面的连通和是什么?

3. 设曲面 $S=nT\#mP^2, m, n\geqslant 1$,试问与 S 同胚的标准曲面为何?

4. 设 S 是一曲面,证明 S 必同胚于下列曲面之一

(1) $S^2\#nT$;(2) $P^2\#nT$; (3) $K\#nT$

其中 K 是 Klein 瓶,$n\geqslant 0$.

5. 若从闭曲面上挖去两个不相交圆盘之内部，并将所得二边界焊接，将会有何结果？

6. 假定每个紧致曲面均可单纯剖分，证明紧致曲面的边界，假若非空的话，它是由有限多个不相交的圆周组成.

7. 证明：任何紧连通曲面必同胚于从一个闭曲面挖去有限多个互不相交圆盘内部而得的空间.

*3.3 闭曲面拓扑分类定理的证明

3.3.1 定理的证明 为了进一步讨论的需要，须假定曲面是可以单纯剖分的. 1925 年，T · Radó 证明了现在认为是经典的结果："紧曲面可三角剖分"（当然闭面可三角剖分）. 对此结论这里不予证明. 下面分几个步骤证明闭曲面的拓扑分类定理：

(1) 设 X 是任意一个闭曲面，则 X 必同胚于由某一多边形成对粘合其对应边所得到的商空间，并有相应的符号表示式.

证明 设闭曲面 X 的单纯剖分为 K，并且不妨设复形 K 的 2 维单形可以排成如下顺序

$$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{\alpha_2}.$$

而 τ_i 与 $\bigcup_{j=1}^{i-1}\tau_j$ 至少相交于一个 1 维单形.

在欧氏平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上构造一个复形 L 如下：

设 $$\underline{\tau}'_1 = \langle a'_0, a'_1, a'_2 \rangle \subset \boldsymbol{R}^2,$$

且令 $$\zeta_1 : \mathrm{Cl}\,\underline{\tau}'_1 \to \mathrm{Cl}\,\underline{\tau}_1,$$

使得

$$\zeta_1(a'_i) = a_i \qquad (i = 0,1,2),$$

$$\zeta_1(\langle a'_i, a'_j \rangle) = \langle a_i, a_j \rangle \qquad (i \neq j),$$

$$\zeta_1(\underline{\tau}'_1) = \underline{\tau}_1.$$

则 ζ_1 是单满单纯映射，即单纯同构.

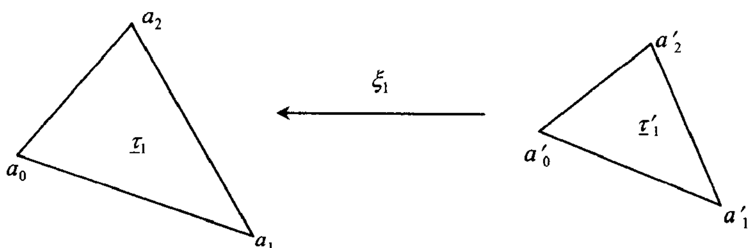


图 3.3.1

取 1 维单形$\underline{e}_2 \in K$,使得

$$\underline{e}_2 = \underline{\tau}_2 \cap \underline{\tau}_1.$$

令 $\zeta_1^{-1}(\underline{e}_2)=\underline{e}'_2$,不妨设$\underline{e}_2=\langle a_1,a_2\rangle$,则$\underline{e}'_2=\langle a'_1,a'_2\rangle$. 取 $a'_3\in \boldsymbol{R}^2$,使得$\underline{\tau}'_2=\langle a'_1,a'_2,a'_3\rangle$是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的 2 维单形,且$\underline{\tau}'_1\cap\underline{\tau}'_2=\underline{e}'_2$.

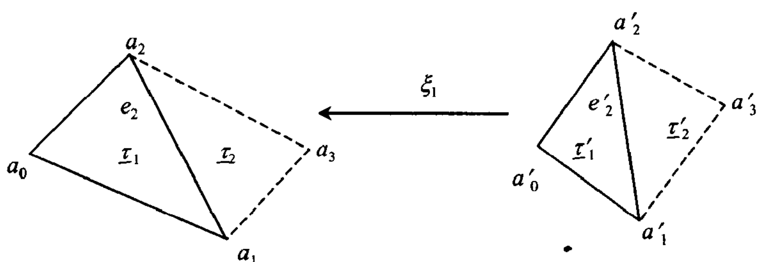


图 3.3.2

如此继续下去,经过有限次最后可得一串 2 维单形

$$\underline{\tau}'_1,\underline{\tau}'_2,\cdots,\underline{\tau}'_{\alpha_2},$$

使得

1)$\underline{\tau}'_i\cap(\bigcup_{j=1}^{i-1}\underline{\tau}'_j)=\underline{e}'_i$ 是 1 维单形,$i-2,3,\cdots,\alpha_2$;

2)ζ_i: $\mathrm{Cl}\,\underline{\tau}'_i\to\mathrm{Cl}\tau_i$ 是单纯同构,$i=1,2,\cdots,\alpha_2$. 令

$$L:=\{\underline{\tau}'_i \text{ 及其各面};\ i=1,2,\cdots,\alpha_2\},$$

则 L 是一个复形,且$|L|$是欧氏平面上的 $m=\alpha_2+2$ 边形,记作 $P_1P_2\cdots P_m$,其中 P_i 表示多边形的顶点,且以逆时针方向排列. 令

$$\zeta : L \to K$$

使得

$$\zeta|_{\mathrm{Cl}\underline{\tau}'_i} = \xi_i : Cl\,\underline{\tau}'_i \to \mathrm{Cl}\tau_i \quad i = 1,2,\cdots,\alpha_2,$$

则 ζ 是单纯映射，所以由 ζ 诱导出的单纯映射

$$\zeta : |L| \to |K|$$

是连续满的，且为闭的. 记由 ζ 导出的 $|L|$ 上的等价关系为 $\sim$，则商空间 $|L|/\sim$ 同胚于 $|K|$，从而同胚于闭曲面 X. 以上表明，对于给定的闭曲面 X 可以看作依某种方式（由 ζ 决定的）成对地粘合 m 边形 $|L| = P_1P_2\cdots P_m$ 的边所得到的商空间.

对于这样的闭曲面引入符号表示，其方法如下：令 a_1^+（简记为 a_1）$= \overrightarrow{P_1P_2}$，即用 a_1 表示有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$，假定 $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \cdots, \overrightarrow{P_lP_{l+1}}$ 都已用带上标的字母标好，现在对于 $\overrightarrow{P_{l+1}P_{l+2}}$，若 $\zeta(\overrightarrow{P_{l+1}P_{l+2}}) \neq \zeta(\overrightarrow{P_1P_2}), \zeta(\overrightarrow{P_2P_3}), \cdots, \zeta(\overrightarrow{P_lP_{l+1}})$，则可用任意一个没用过的字母表示 $\overrightarrow{P_{l+1}P_{l+2}}$，若 $\zeta(\overrightarrow{P_{l+1}P_{l+2}}) = \zeta(\overrightarrow{P_hP_{h+1}})$ $1 \leqslant h \leqslant l$，则当 $\zeta(P_{l+1} = \zeta(P_h)$ 时，用表示 $\overrightarrow{P_hP_{h+1}}$ 的带有上标的字母，不妨设是 x 表示 $\overrightarrow{P_{l+1}P_{l+2}}$，否则，用 x^{-1} 表示 $\overrightarrow{P_{l+1}P_{l+2}}$，最后依次写出表示边的带有上标的字母，即为给定闭面 X 的符号表示式.

例如，图 3.3.3 给出的 Klein 瓶，有符号表示式：$a_1a_2a_1^{-1}a_2$.

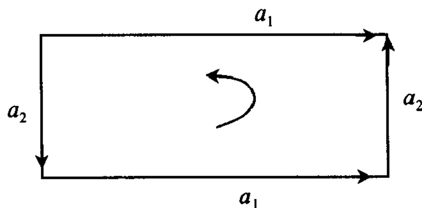


图 3.3.3

(2) 将闭曲面的符号表示式变换为标准形式，即变换为球面

$S^2: aa^{-1}$或

n个环面的连通和$T_1 \# T_2 \# \cdots \# T_n$:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1},$$

或n个射影平面的连通和$P_1 \# P_2 \# \cdots \# P_n$:

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n.$$

如上所述,一个闭曲面X必同胚于由某个m边形以某种方式成对地粘合其对应边所得到的商空间.具有粘合边的这样的多边形记作Ω,在其相对应的闭曲面符号表示式中用同一字母表示的一对边,则互称为对应边.如果其相同字母的上标不相同,则这一对对应边称为第一种对应边,否则,称为第二种对应边.

以下将通过五个步骤把所得到的闭曲面的符号表示式变换为标准形式.

1) 消去第一种相邻对应边

若闭曲面X的符号表示式为$\cdots aa^{-1}\cdots$,这表明Ω中出现了第一种相邻对应边,则可按如下方式消去闭曲面符号表示式中的aa^{-1},从而从Ω中消去了一对第一种相邻对应边(如图 3.3.4).

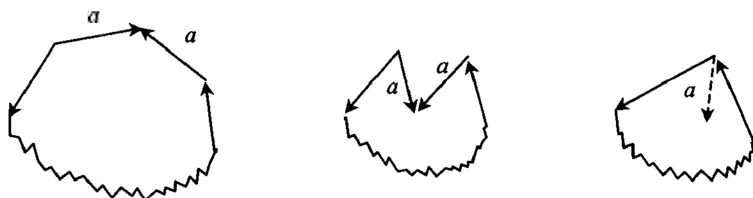


图 3.3.4 消去第一种相邻对应边

于是如此继续下去,最后可得一个多边形,它不出现第一种相邻对应边;或得到一个二边形,它的边必须为对应边,从而相应的闭曲面有符号表示式:xx或xx^{-1},此即为标准形式.所以不妨设最后得到的多边形,其边数$\geqslant 4$,且不出现第一种相邻对应边,记这个多边形为Ω_1.

2）变换多边形使其顶点粘合为一点

对于多边形 Ω_1，虽然其边是成对粘合的，但其顶点未必能粘合为一点，不妨设 Ω_1 的顶点不能粘合为一点，于是必有一边 $m=\overrightarrow{PQ}$使顶点 P 与 Q 不粘合为一点. 又设与顶点 P 关联的另一条边为 $a=\overrightarrow{RP}$，沿着 $c=\overrightarrow{RQ}$切割多边形 Ω_1 成为$\triangle PQR$ 与多边形 π，则与 a 相对应的边必在多边形 π 上，将$\triangle PQR$ 与多边形 π 沿着字母 a 代表的边粘合起来，则得到一个新多边形，记作 Ω'_1. 对于 Ω'_1，用字母 P 表示的顶点的个数减少一个，而用字母 Q 表示的顶点的个数增加一个. 若在 Ω'_1 中出现了第一种相邻对应边，则可重复第一步的方法，消去第一种相邻对应边，否则，重复第二步的方法，减少字母 P 表示的顶点的数目，当用 P 表示的顶点的数目为 1 时，则必然出现第一种相邻对应边，消去这样的相邻对应边后，那么用字母 P 表示的顶点就消失了.

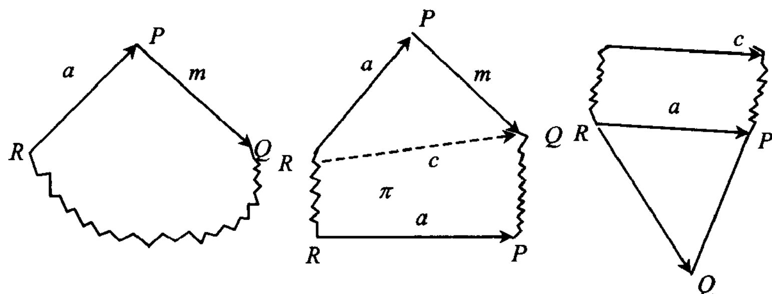


图 3.3.5 减少 P 点的数目

重复使用以上方法，最后要么得到一个二边形，它的边必为对应边，因而相应的闭曲面有符号表示式 xx 或 xx^{-1}，此即为标准形式；要么得到一个顶点都粘合为一点的多边形，且没有第一种相邻对应边，而边数$\geqslant 4$，成对地粘合其边所得到的商空间即为闭曲面 X，记这多边形为 Ω_2.

3）构造第二种相邻对应边

如果多边形 Ω_2 中出现了第二种对应边，则可通过如 3.3.6 图所示的方法变换为第二种相邻对应边. 不妨设 Ω_2 有第二种对应边，但不是相邻的，从而相对应的闭曲面有符号表示式：

$$\cdots c\cdots c\cdots.$$



图 3.3.6 构造第二种相邻对应边

如图 3.3.6 所示，沿着虚线 a 表示的边切割多边形 Ω_2 然后再沿着字母 c 表示的一对对应边粘合起来即求得第二种相邻对应边，相对应的闭曲面有符号表示式：$\cdots aa\cdots$.

如此继续下去，将第二种对应边都变为相邻的，最后要么可得一个多边形成对粘合其边所得到的商空间即为闭曲面 X，且有符号表示式

$$a_1a_1a_2a_2\cdots a_na_n$$

即为 n 个射影平面的连通和的符号表示式，此即为所求的标准形式；要么得到一个多边形，在它构造完第二种相邻边后，还出现第一种对应边，记这个多边形为 Ω_3.

4）构造第一种对应边对

对于不存在第二种对应边的多边形 Ω_2，或构造完第二种相邻对应边的多边形 Ω_3，若出现第一种对应边，则至少出现两对，且互相间隔（若不然，则必导致与已完成的步骤 2），即多边形的顶点都粘合为一点相矛盾）. 因此，相应的闭曲面有符号表示式

$$\cdots c\cdots d\cdots c^{-1}\cdots d^{-1}\cdots$$

用如 3.3.7 图所示的方法变换多边形 Ω_2 或 Ω_3，则相对应的闭曲

面有符号表示式

$$\cdots aba^{-1}b^{-1}\cdots$$

$aba^{-1}b^{-1}$即为所求的第一种对应边对.

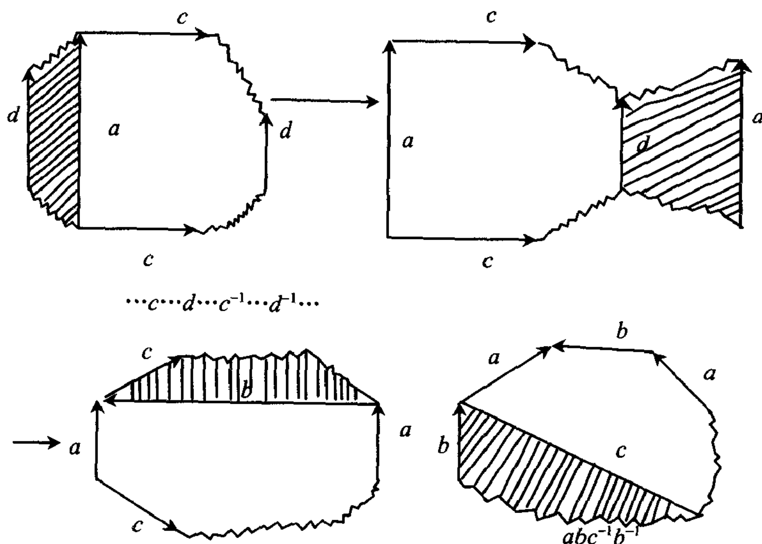


图 3.3.7 构造第一种对应边对

如此继续下去,在构造完第一种对应边对后,要么得到闭曲面的符号表示式为

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}.$$

此即为 n 个环面连通和的符号表示式,即是标准形式;要么得到一个多边形,它既含有第一种对应边对,还含有第二种相邻对应边,记这个多边形为 Ω_4.

5) 把一个第一种对应边对与一对第二种相邻对应边变换为三对第二种相邻对应边

对于多边形 Ω_4,设其对应的闭曲面的符号表示式为

$$\cdots aba^{-1}b^{-1}\cdots cc\cdots$$

则通过如图 3.3.8 所示的方法变换多边形 Ω_4,使其相对应的闭典

型面有符号表示式

$$\cdots a_1a_1a_2a_2a_3a_3\cdots$$

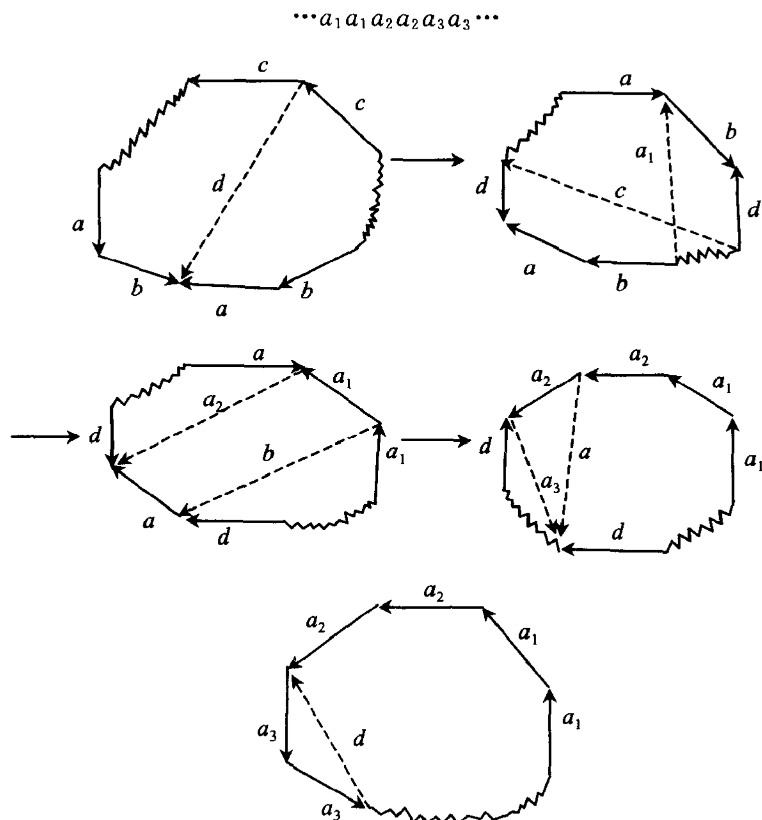


图 3.3.8 构造三对第二种相邻对应边

如此继续下去,最后可得闭曲面的符号表示式

$$a_1a_1a_2a_2\cdots a_na_n,$$

此为 n 个射影平面连通和的符号表示式,即是标准形式.

综合上面五步,便证明了闭曲面分类定理的第一部分,即任意闭曲面或同胚于球面,或同胚于 n 个环面的连通和,或同胚于 n 个射影平面的连通和.下面证明分类定理中余下部分的结论.为此,

我们先证下面几个引理：

引理 1 设 X_1 与 X_2 都是闭曲面，则

$$\chi(X_1 \# X_2) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - 2.$$

证明 不妨设闭曲面 X_1 与 X_2 分别有单纯剖分 (K_1, φ_1) 与 (K_2, φ_2)，使得

$$|K_1| \cap |K_2| = \underline{\sigma}^2 (2 \text{ 维单形}) \in K_1 \cup K_2.$$

令 $$L = K_1 \cup K_2 - \{\underline{\sigma}^2\},$$

则复形 L 是闭曲面 $X_1 \# X_2$ 的一个单纯剖分，记 $\alpha_i(L)$ 为复形 L 的 i 维单形的个数，则

$$\alpha_2(L) = \alpha_2(K_1) + \alpha_2(K_2) - 2,$$
$$\alpha_1(L) = \alpha_1(K_1) + \alpha_1(K_2) - 3,$$
$$\alpha_0(L) = \alpha_0(K_1) + \alpha_0(K_2) - 3,$$

从而

$$\begin{aligned}\chi(L) &= \alpha_0(L) - \alpha_1(L) + \alpha_2(L) \\ &= [\alpha_0(K_1) - \alpha_1(K_1) + \alpha_2(K_1)] \\ &\quad + [\alpha_0(K_2) - \alpha_1(K_2) + \alpha_2(K_1)] - 3 + 3 - 2 \\ &= \chi(K_1) + \chi(K_2) - 2,\end{aligned}$$

即

$$\chi(X_1 \# X_2) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - 2. \qquad \blacksquare$$

引理 2 闭曲面都是闭伪流形.

证明 首先球面是闭伪流形. 对于 n 个环面的连通和与 n 个射影平面的连通和，则可以给出如图 3.3.9 所示的单纯剖分，称之为标准剖分，这表明两者都是闭伪流形. 所以闭曲面是闭伪流形.

$\blacksquare$

3.3.2 定义 若闭曲面的单纯剖分(闭伪流形)是可定向的，

则称闭曲面是**可定向**的，否则称闭曲面是**不可定向**的.

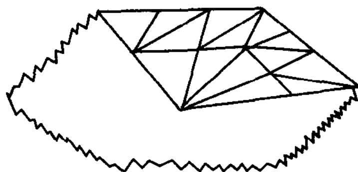


图 3.3.9 标准剖分

从上面的引理和定义可得下表：

闭曲面	示性数	定向性
1. 球面 S^2	2	可定向
2. n 个环面的连通和	$2-2n$	可定向
3. n 个射影平面连通和	$2-n$	不可定向

从同调群的拓扑不变性可知，闭曲面的示性数与定向性都是拓扑不变的，所以由上表可知球面 S^2，n 个环面的连通和，以及 n 个射影平面的连通和中，任意两个闭曲面都是不同胚的，其中 $n=1,2,\cdots$. 至此，分类定理完全被证明了.

从分类定理可得：

3.3.3 定理(曲面拓扑学基本定理) 两个闭曲面同胚的充要条件是它们的示性数相等，可定向性相同.

3.3.4 定义 球面 S^2 的**亏格**(亏数)$g=0$，n 个环面的连通和的**亏格** $g=n$，n 个射影平面的连通和的**亏格** $g=n$.

3.3.5 定理 设 X 为闭曲面

(1) 若 X 可定向，且亏格 $g=h$，则

$$H_q(X)=\begin{cases} Z & q=0,2; \\ Z\oplus Z\oplus\cdots\oplus Z\text{（共 }2h\text{ 个）} & q=1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

（2）若闭曲面 X 不可定向，且亏格 $g=k$，则

$$H_q(X)=\begin{cases} Z & q=0; \\ \underbrace{Z\oplus Z\oplus\cdots\oplus Z}_{k-1}\oplus Z_2 & q=1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

证明从略.

习 题

1. 下列文字形式写出的多边形表示何种类型的曲面？

（1）$abcda^{-1}bc^{-1}d$；

（2）$abacb^{-1}dcd$；

（3）$abcb^{-1}dc^{-1}a^{-1}d^{-1}$；

（4）$abca^{-1}cdeb^{-1}fedf$.

2. 若在环面上挖去一圆的内部，然后把洞口的对径点粘合，所得曲面为何类型？

3. 计算 $H_q(T\# P^2)=?$

4. 给定有限生成的 Abel 群 G_1,G_2，而 G_2 是自由的. 证明：必∃一2 维复形 K，使得 K 连通，且 $H_1(K)\cong G_1$，$H_2(K)\cong G_2$.

*3.4 紧致、连通、带边曲面的分类

3.4.1 定义 设 X 为带边曲面，则 X 的边界 ∂X 的连通分支的个数称为带边曲面 X 的**边缘数**.

显然，闭曲面的边缘数＝0（因为 $\partial X=\emptyset$）；带边曲面的边界的

每一连通分支都同胚于圆 S^1.

3.4.2 分类定理 任何连通、紧致、带边曲面必同胚于下列三种曲面之一：

(1)有 k 个洞的球面；

(2) 有 k 个洞的 n 个环面的连通和；

(3)有 k 个洞的 n 个射影平面的连通和. 并且这些曲面有符号表示式：

(1) 有 k 个洞的球面：

$$aa^{-1}c_1l_1c_1^{-1}\cdots c_kl_kc_k^{-1};$$

(2) 有 k 个洞的 n 个环面的连通和：

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}c_1l_1c_1^{-1}c_2l_2c_2^{-1}\cdots c_kl_kc_k^{-1};$$

(3) 有 k 个洞的 n 个射影平面的连通和：

$$a_1a_1a_2a_2\cdots a_na_nc_1l_1c_1^{-1}\cdots c_kl_kc_k^{-1}.$$

显然，紧致连通的带边曲面的单纯剖分都是带边伪流形.

3.4.3 定义 若紧致、连通的带边曲面的单纯剖分是可定向的，或是不可定向的，则称这曲面是**可定向的**，或是**不可定向的**.

3.4.4 定理(带边曲面拓扑学基本定理) 二紧致连通的带边曲面同胚的充要条件是它们有相同的示性数、定向性与边缘数.

注 本节定理的证明均从略.

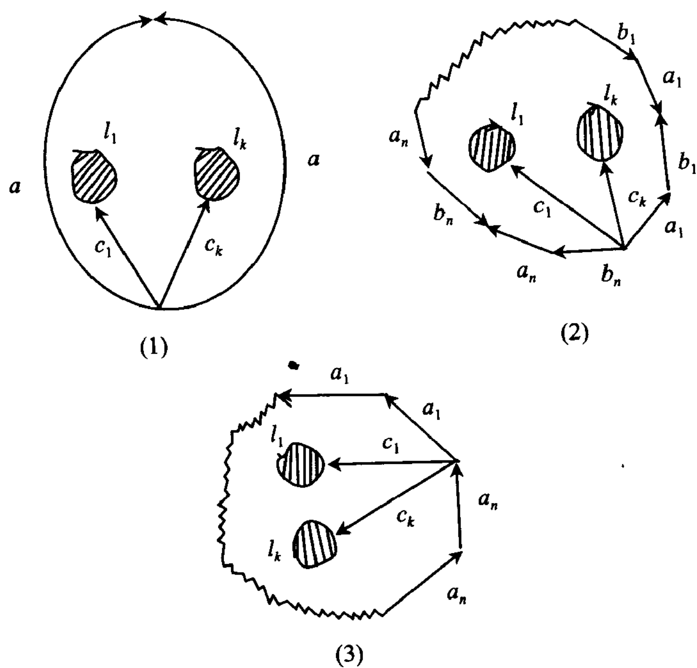


图 3.4.1

第4章 基 本 群

4.1 映射的同伦与空间的伦型

4.1.1 定义 设 X,Y 为二拓扑空间，$I=[0,1]$，又设 f_0,f_1：$X\to Y$ 都是连续映射. 若存在连续映射

$$F: X\times I\to Y,$$

使得对任意 $x\in X$，有

$$F(x,0)=f_0(x),$$
$$F(x,1)=f_1(x),$$

则称连续映射 f_0 **同伦**于 f_1，记作

$$f_0\simeq f_1: X\to Y,$$

或 $f_0\overset{F}{\simeq}f_1$ 或简记成 $f_0\simeq f_1$；称映射 F 为从 f_0 到 f_1 的一个**同伦**或**伦移**.

令 $f_t(x)=F(x,t)$，则得到一个单参数 t 的连续映射族

$$\{f_t: X\to Y; t\in I\}.$$

如果将 t 理解为时间，则 $f_t(X)$ 为时刻 t 时 X 在 Y 中的像，所以，当 t 从 0 变到 1 时，伦移 F 将映射 f_0 连续地变形为 f_1.

4.1.2 定义 设 $f_0\simeq f_1$：$X\to Y$，若 f_1 是常值映射，则称 f_0 是**零伦的**.

例 设 $X=Y=\boldsymbol{R}^n$，记 $I_{\boldsymbol{R}^n}$：$\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ 为恒等映射，而

$$c: \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$$

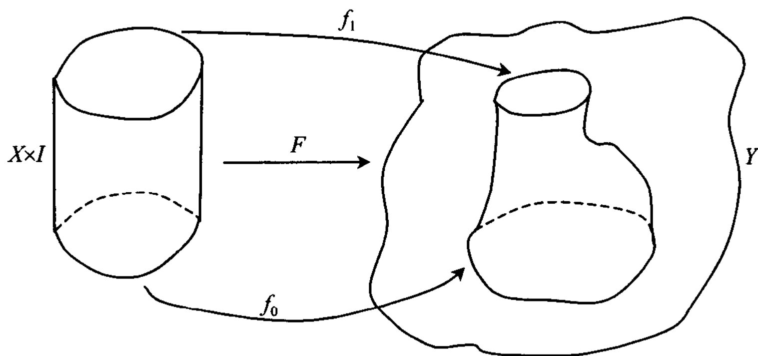


图 4.1.1

为常值映射,使得

$$c(\boldsymbol{R}^n) = x_0 \in \boldsymbol{R}^n,$$

则

$$I_{\boldsymbol{R}^n} \simeq c : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n.$$

事实上,令 $F(x,t)=(1-t)x+tx_0$,则映射

$$F : \boldsymbol{R}^n \times I \to \boldsymbol{R}^n$$

是连续的,且

$$F(x,0) = x = I_{\boldsymbol{R}^n}(x),$$
$$F(x,1) = x_0 = c(x).$$

所以

$$I_{\boldsymbol{R}^n} \overset{F}{\simeq} c.$$

4.1.3 粘接引理 设 X 为拓扑空间,$X=A\cup B$,其中 A,B 均为 X 的闭子集,又令

$$f : A \to Y,$$
$$g : B \to Y$$

均为连续映射,且

$$f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}.$$

则 $h: X \to Y$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A, \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

是连续映射.

证明 设 F 是 Y 中的闭子集,则

$$\begin{aligned} h^{-1}(F) &= h^{-1}(F) \cap X \\ &= h^{-1}(F) \cap (A \cup B) \\ &= (h^{-1}(F) \cap A) \cup (h^{-1}(F) \cap B) \\ &= f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F) \end{aligned}$$

因为 $f: A \to Y$ 是连续映射,所以 $f^{-1}(F)$是子空间 A 的闭子集,但是 A 又是 X 中的闭集,从而 $f^{-1}(F)$是 X 中的闭集,同样可知 $g^{-1}(F)$也是 X 中的闭集,所以 $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$是 X 中的闭集,故 $h: X \to Y$ 是连续的. ■

4.1.4 推论 设 X, Y 为拓扑空间,$X = A \cup B$,A, B 均为 X 中的闭子集,且 $f, g: X \to Y$ 都连续,若

$$f|_A \overset{F_1}{\simeq} g|_A : A \to Y,$$

$$f|_B \overset{F_2}{\simeq} g|_B : B \to Y.$$

且
$$F_1|_{(A \cap B) \times I} = F_2|_{(A \cap B) \times I},$$

则
$$f \simeq g : X \to Y.$$

证明 只需令

$$F(x,t) = \begin{cases} F_1(x,t) & x \in A, t \in I, \\ F_2(x,t) & x \in B, t \in I, \end{cases}$$

则有 $f \overset{F}{\simeq} g$. ■

4.1.5 定义 设 $A \subset X$ 为 X 的子集,$f_0, f_1 : X \to Y$ 为二连续映射,若 $f_0 \overset{F}{\simeq} f_1$,且当 $a \in A$ 时,$F(a,t)$与 t 无关,即当 $a \in A$,

$F(a,t)=f_0(a), t\in I$，则称 f_0 与 f_1 是**相对于 A 同伦的**，记作 $f_0 \simeq f_1(\mathrm{rel}A)$ 或 $f_0 \simeq_{\mathrm{relA}} f_1$；此时，还称 F 为**相对于 A 的同伦或伦移**.

例 1 令 $X=I, A=\{0\}\subset X$，且映射 f_0, f_1, F 如图 4.1.2 所示.

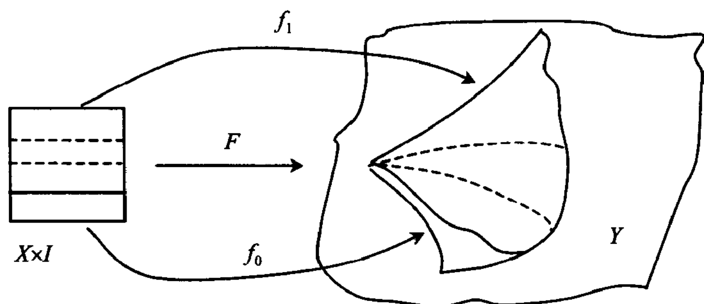


图 4.1.2

则 f_0 与 f_1 是相对于 A 的同伦映射.

例 2 令 $X=I, A=\{0,1\}$ 且 Y 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的一个圆环，映射 f_0、f_1、F 如图 4.1.3 所示.

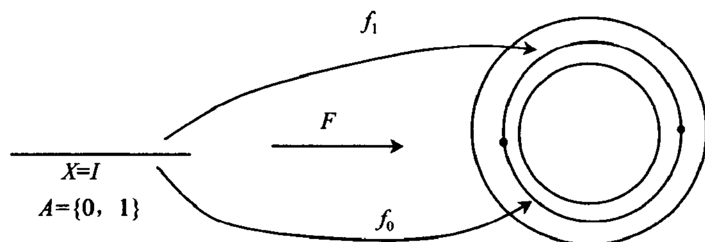


图 4.1.3

则 f_0 与 f_1 是同伦的，但它们不是相对于 A 同伦的.

4.1.6 定理 从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射作成的集合 Y^X 中，映射的同伦关系是一等价关系.

证明 (1) 反身性

设 $f: X\to Y$ 是连续映射，令

$$F(x,t)=f(x),$$

则

$$f\overset{F}{\simeq}f: X\to Y;$$

(2) 对称性

设 $f\overset{F}{\simeq}g: X\to Y$，令

$$G(x,t)=F(x,1-t),$$

则

$$g\overset{G}{\simeq}f: X\to Y;$$

(3) 传递性

设 $f\overset{F}{\simeq}g$ 且 $g\overset{G}{\simeq}h$，令

$$H(x,t)=\begin{cases}F(x,2t) & (0\leqslant t\leqslant 1/2),\\ G(x,2t-1) & (1/2\leqslant t\leqslant 1),\end{cases}$$

则 $f\overset{H}{\simeq}h$. 所以集合 Y^X 中的连续映射的同伦关系 $\simeq$ 是一个等价关系. ■

由此可见，在 $Y^X=\{f, f: X\to Y$ 为连续映射$\}$ 中，依映射同伦关系 $\simeq$ 分可成等价类，每一个等价类称作一个**同伦类**.

4.1.7 定理 设 X,Y,Z 均为拓扑空间，又设

$$f_0\overset{F}{\simeq}f_1: X\to Y,$$

$$g_0\overset{G}{\simeq}g_1: Y\to Z,$$

则

$$g_0f_0\simeq g_1f_1: X\to Z.$$

证明 据题设 $f_0\overset{F}{\simeq}f_1: X\to Y$，令

$$H=g_0F,$$

则 $H: X\times I\to Z$ 为连续映射，且

$$H(x,0) = g_0 F(x,0) = g_0 f_0(x),$$
$$H(x,1) = g_0 F(x,1) = g_0 f_1(x),$$

所以

$$g_0 f_0 \overset{H}{\simeq} g_0 f_1 : X \to Z.$$

再据题设

$$g_0 \overset{G}{\simeq} g_1,$$

令

$$K(x,t) = G(f_1(x),t),$$

则 $K : X \times I \to Z$ 是连续映射，且

$$K(x,0) = G(f_1(x),0) = g_0 f_1(x),$$
$$K(x,1) = G(f_1(x),1) = g_1 f_1(x),$$

所以 $$g_0 f_1 \overset{K}{\simeq} g_1 f_1 : X \to Z.$$

由映射同伦关系的传递性，则有

$$g_0 f_0 \simeq g_1 f_1 : X \to Z.$$ ■

4.1.8 定义 设 X,Y 为拓扑空间，若存在连续映射

$$f : X \to Y$$

与 $$g : Y \to X,$$

使得

$$gf \simeq I_X : X \to X,$$
$$fg \simeq I_Y : Y \to Y.$$

则称拓扑空间 X 与 Y 是**同伦等价**的；或称二者**有相同的伦型**. 记作 $X \simeq Y$，f 称为从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的一个**同伦等价(映射)**，g 称为同伦等价 f 的**逆**.

显然，同胚的空间必是同伦等价的，所以同伦等价这一概念是同胚概念的推广；但必须注意，同伦等价的空间未必同胚，读者试举例给以说明.

4.1.9 定理 拓扑空间的同伦等价关系是拓扑空间之间的一个等价关系.

证明 (1) 反身性

设 X 为拓扑空间,则 $X\simeq X$;

(2) 对称性

设 $X\simeq Y$,则 $Y\simeq X$;

(3) 传递性

设 $f:X\simeq Y,h:Y\simeq Z$ 都是同伦等价,又设 $g:Y\simeq X,k:Z\simeq Y$ 分别是同伦等价 f 与 h 之逆,因为

$$hf:X\to Z,$$

$$gk:Z\to X,$$

均为连续映射,且

$$(hf)(gk)=h(fg)k\simeq hI_Yk=hk\simeq I_Z,$$

$$(gk)(hf)=h(kh)f\simeq gI_Yf=gf\simeq I_X,$$

所以

$$hf:X\simeq Z.$$ ■

由此可知,依拓扑空间的同伦等价关系可将拓扑空间进行分类,同一类拓扑空间具有相同的伦型,不同类拓扑空间具有不同伦型.由于同胚空间是同伦等价的,所以拓扑空间的同伦等价分类是同胚分类的一种推广.

独点空间是最简单的空间,常值映射是最简单的映射,从同伦的观点讨论它们是有意义的.

4.1.10 定义 与独点空间同伦等价的拓扑空简称为**可压缩**的.

例如 D^n 是可压缩的,更一般地,$\boldsymbol{R}^n$ 中的任意凸子集是可压缩的,直观上,一空间是可压缩的,如果在它自身的范围内,它能形变成一点(一圆不能在它自身范围内变为点).

4.1.11 定理　拓扑空间 X 是可压缩的，当且仅当恒等映射 $I_X: X\to X$ 是零伦的.

证明　设 pt 表示由一点构成的拓扑空间. 若拓扑空间 X 是可压缩的，则存在连续映射

$$f: X \to pt$$

与

$$g: pt \to X,$$

使

$$gf \simeq I_X: X \to X,$$

且

$$fg \simeq I_{pt}: pt \to pt.$$

由于 $gf: X\to X$ 是常值映射，所以 X 上的恒等映射

$$I_X: X \to X$$

是零伦的. 反之，设恒等映射 $I_X: X\to X$ 是零伦的，则有常值映射 $c: X\to X$，使得

$$I_X \simeq c: X \to X.$$

令

$$f: X \to pt \quad 使得\ f(x) = pt,$$
$$g: pt \to X \quad 使得\ g(pt) = c(X).$$

则

$$gf = c \simeq I_X: X \to X,$$
$$fg = I_{pt}: pt \to pt,$$

所以

$$X \simeq pt.$$

即拓扑空间 X 是可压缩的.

习　题

1. 证明连续映射 $f: S^1\to X$ 是零伦的 $\Leftrightarrow$ 存在连续映射 $g: D^2\to X$，使 $g|S^1=f$.

2. 证明：连续映射 $f: X\to Y$ 零伦 $\Leftrightarrow f$ 可扩张到 $CX :=$

$X\times I/X\times 1$上.

3. 证明:若连续映射 $f:X\to S^n$ 不满,则 f 零伦.

4. 证明:若 $f_0\simeq f_1(\mathrm{rel}A):X\to Y,g:Y\to Z$,则

$$gf_0\simeq gf_1(\mathrm{rel}A).$$

5. 证明:S^n 的任何旋转都同伦于 S^n 的恒等映射.

6. 证明:若 X 与 Y 同伦等价,X'与 Y'也同伦等价,则 $X\times X'$ 与 $Y\times Y'$同伦等价,还证明对 $\forall$ 空间 X,CX 可缩.

7. 设 $f\simeq g:S^1\to X$,求证 $D^2\cup_f X$ 同伦等价于 $D^2\cup_g X$,其中 $D^2\cup_f X=D^2\amalg X/x\sim f(x)$.

8. 求证圆柱面与 Möbius 带都与圆周同伦等价.

9. 证明下列三空间是互相同伦等价的.

(1) 球面 S^2 加一条直径;

(2) 在环面的一纬圆上粘接一圆盘;

(3) 球面 S^2 加一圆周 S^1,使它们相切.

10. 证明到可缩空间的任二映射都是同伦的.

4.2 道路·道路类

4.2.1 定义 设 X 为拓扑空间,则连续映射

$$\alpha:I\to X$$

称为拓扑空间 X 中的一条**道路**;$x_0=\alpha(0)$,$x_1=\alpha(1)$分别称为道路 α 的**始点**与**终点**.

4.2.2 定义 设 $\alpha,\beta:I\to X$ 是拓扑空间 X 中的两条道路,且具有相同的始点 $x_0=\alpha(0)=\beta(0)$与终点 $x_1=\alpha(1)=\beta(1)$,若存在连续映射

$$F:I\times I\to X,$$

使得对于任意的 $s,t\in I$,有

$$F(s,0)=\alpha(s),$$
$$F(s,1)=\beta(s),$$
$$F(0,t)=x_0,$$
$$F(1,t)=x_1.$$

则称拓扑空间 X 中的道路 α 与 β 是**道路同伦的**,或**等价的**,记作 $\alpha \underset{P}{\simeq} \beta$,$F$ 称为连接道路 α 与 β 之间的**道路同伦**.

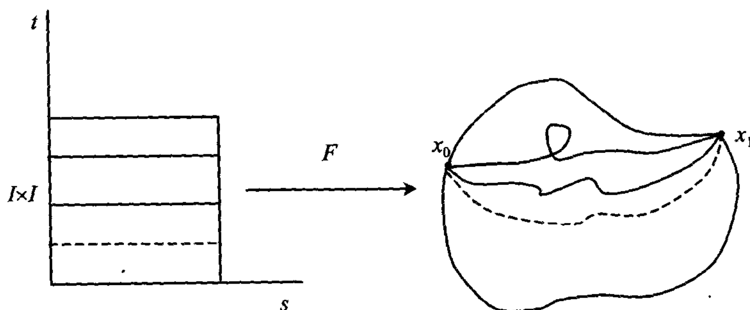


图 4.2.1

4.2.3 定理 设 X 是拓扑空间,则 X 中的道路同伦(等价)关系 $\underset{P}{\simeq}$ 是一个等价关系.

证明 直接验证即可. ■

可见,在拓扑空间 X 中以给定点 x_0,x_1 分别为始点与终点的全体道路集合上可以道路等价关系分成等价类.若 α 是 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路,则拓扑空间 X 中道路 α 所在的道路类以$[\alpha]$记之.

例 设 $X=\boldsymbol{R}^2-\{0\}$,称其为穿孔平面.

设道路 $\alpha: I\to X$,使得

$$\alpha(s)=(\cos\pi s,\sin\pi s)\in X$$

与道路 $\beta: I\to X$,使得

$$\beta(s) = (\cos\pi s, 2\sin\pi s).$$

令 $F(s,t)=(1-t)\alpha(s)+t\beta(s)$，则 α 与 β 是等价的道路.

再令，道路 $\gamma: I\to X$，使得

$$\gamma(s) = (\cos\pi s, -\sin\pi s) \in X,$$

则道路 α 与 γ 虽有相同的始点与终点，但不存在联结道路 α 与 γ 的道路同伦. 这在直观上是明显的，即不能将 α 形变到 γ 再穿过 O 点的洞时而不破坏其连续性.

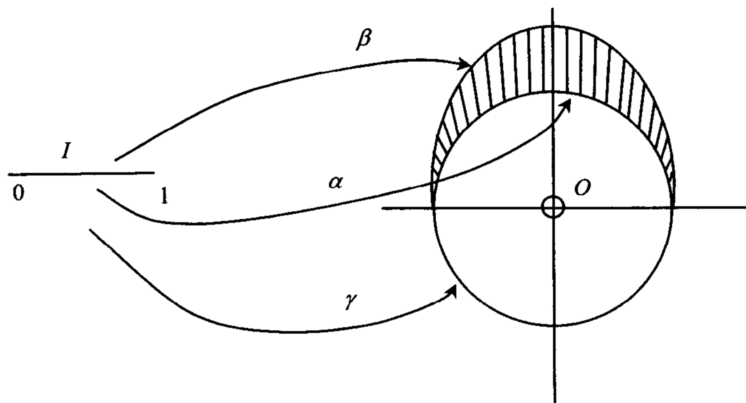


图 4.2.2

4.2.4 定义 设 $\alpha,\beta: I\to X$ 是拓扑空间中的两条道路，且满足：

$$\alpha(1) = x_1 = \beta(0),$$

令

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ \beta(2s-1) & 1/2 \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

则 $\alpha * \beta: I\to X$ 仍是 X 中的一条道路，称其为道路 α 与 β 的积.

4.2.5 定理 设 $\alpha,\alpha';\beta,\beta'$ 都是拓扑空间 X 中的道路，且满

足：

$$\alpha \underset{P}{\simeq} \alpha' : I \to X,$$

$$\beta \underset{P}{\simeq} \beta' : I \to X,$$

$$\alpha(1) = \beta(0).$$

则 $\alpha * \beta \underset{P}{\simeq} \alpha' * \beta'$，即 $\alpha * \beta$ 与 $\alpha' * \beta'$ 是拓扑空间 X 中的等价道路.

证明 据题设可令 F 是连接道路 α 与 α' 之间的道路同伦，G 是连接道路 β 与 β' 之间的道路同伦，令 $H: I \times I \to X$，使得

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ G(2s-1,t), & 1/2 \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

则 H 是连接道路 $\alpha * \beta$ 与 $\alpha' * \beta'$ 之间的道路同伦，即 $\alpha * \beta \underset{P}{\simeq} \alpha' * \beta'$. ■

4.2.6 定义 设 α, β 均为拓扑空间 X 的道路，其中 $\alpha(1) = \beta(0)$，则令

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta],$$

称其为拓扑空间 X 中的道路类 $[\alpha]$ 与 $[\beta]$ 的**积**.

4.2.7 定义 设 $\alpha: I \to X$ 是拓扑空间 X 中一条以 $x_0 = \alpha(0)$ 为始点，$x_1 = \alpha(1)$ 为终点的道路，令 $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$，则

$$\bar{\alpha} : I \to X$$

是拓扑空间 X 中以 x_1 为始点，x_0 为终点的一条道路，称其为道路 α 的**逆道路**.

4.2.8 定理 设 α, β 都是拓扑空间 X 中的道路，若

$$\alpha \underset{P}{\simeq} \beta : I \to X,$$

则

$$\bar{\alpha} \underset{P}{\simeq} \bar{\beta} : I \to X.$$

证明 据题设可令 F 是连接道路 α 与 β 之间的道路同伦，再令

$$G: I \times I \to X,$$

使

$$G(s,t) = F(1-s,t).$$

则 G 是连接道路 $\bar{\alpha}$ 与 $\bar{\beta}$ 之间的道路同伦，即

$$\bar{\alpha} \underset{P}{\simeq} \bar{\beta}.$$

■

4.2.9 定义 设 $\alpha: I \to X$ 是拓扑空间 X 中的一条道路，令

$$\overline{[\alpha]} = [\bar{\alpha}],$$

称 $\overline{[\alpha]}$ 为道路类 $[\alpha]$ 的**逆**.

4.2.10 定理 运算 $\circ$ 在给定拓扑空间 X 的道路类集合上是完全确定的，且满足

(1)(结合律) 若 $[\alpha]\circ([\beta]\circ[\gamma])$ 有定义，则

$$[\alpha]\circ([\beta]\circ[\gamma]) = ([\alpha]\circ[\beta])\circ[\gamma];$$

(2)(存在右和左单位元) 若 α 是拓扑空间 X 中的 x_0 为始点 x_1 为终点的一条道路，则

$$[\alpha]\circ[c_{x_1}] = [\alpha],$$

$$[c_{x_0}]\circ[\alpha] = [\alpha],$$

其中 $c_x: I \to X$ 为常值映射，使得

$$c_x(I) = x \in X.$$

(3)(存在逆元) 若 α 是拓扑空间 X 中以 x_0 为始点 x_1 为终点的一条道路，则

$$[\alpha]\circ\overline{[\alpha]} = [c_{x_0}],$$

且

$$\overline{[\alpha]}\circ[\alpha] = [c_{x_1}].$$

证明 据定理 4.2.5 可知运算$\circ$在拓扑空间 X 的道路类的集合上是确定的.

(1) 设拓扑空间 X 中道路 α,β 与 γ,满足 $\alpha(0)=x_0,\alpha(1)=\beta(0)=x_1,\beta(1)=\gamma(0)=x_2,\gamma(1)=x_3$,于是有

$$((\alpha*\beta)*\gamma)(s)=\begin{cases}\alpha(4s), & 0\leqslant s\leqslant 1/4,\\ \beta(4s-1), & 1/4\leqslant s\leqslant 1/2,\\ \gamma(2s-1), & 1/2\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

$$(\alpha*(\beta*\gamma))(s)=\begin{cases}\alpha(2s), & 0\leqslant s\leqslant 1/2,\\ \beta(4s-2), & 1/2\leqslant s\leqslant 3/4,\\ \gamma(4s-3), & 3/4\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

令

$$F(s,t)=\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{4s}{1+t}\right), & 0\leqslant s\leqslant \dfrac{1+t}{4},\\ \beta(4s-t-1), & \dfrac{1+t}{4}\leqslant s\leqslant \dfrac{t+2}{4},\\ \gamma\left(\dfrac{4s-t-2}{2-t}\right), & \dfrac{t+2}{4}\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

则

$F:I\times I\to X$ 是连续映射,且

$$F(s,0)=\begin{cases}\alpha(4s), & 0\leqslant s\leqslant 1/4,\\ \beta(4s-1), & 1/4\leqslant s\leqslant 1/2,\\ \gamma(2s-1), & 1/2\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$
$$=((\alpha*\beta)*\gamma)(s);$$

$$F(s,1)=\begin{cases}\alpha(2s), & 0\leqslant s\leqslant 1/2,\\ \beta(4s-2), & 1/2\leqslant s\leqslant 3/4,\\ \gamma(4s-3), & 3/4\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$
$$=(\alpha*(\beta*\gamma))(s);$$

$$F(0,t)=\alpha(0)=x_0,$$
$$F(1,t)=\gamma(1)=x_3.$$

所以 F 是连接道路$(\alpha*\beta)*\gamma$与$\alpha*(\beta*\gamma)$之间的道路同伦，即

$$(\alpha*\beta)*\gamma \underset{P}{\simeq} \alpha*(\beta*\gamma).$$

从而得

$$([\alpha]\circ[\beta])\circ[\gamma]=[\alpha]\circ([\beta]\circ[\gamma]).$$

(2) 据题设，令

$$F(s,t)=\begin{cases} c_{x_0}(s)=x_0, & 0\leqslant s\leqslant \dfrac{1-t}{2}, \\ \alpha\left(\dfrac{2}{1+t}\left(s-\dfrac{1-t}{2}\right)\right), & \dfrac{1-t}{2}\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

则 $F: I\times I\to X$ 是连续映射，且

$$F(s,0)=\begin{cases} x_0, & 0\leqslant s\leqslant 1/2, \\ \alpha(2s-1), & 1/2\leqslant s\leqslant 1 \end{cases}$$
$$=(c_{x_0}*\alpha)(s),$$

$$F(s,1)=\begin{cases} x_0, & s=0, \\ \alpha(s), & 0\leqslant s\leqslant 1 \end{cases}$$
$$=\alpha(s),$$

$$F(0,t)=x_0,\quad F(1,t)=\alpha(1)=x_1.$$

所以，F 是连接道路 $c_{x_0}*\alpha$ 与 α 之间的道路同伦，即

$$c_{x_0}*\alpha \underset{P}{\simeq} \alpha,$$

从而得

$$[c_{x_0}]\circ[\alpha]=[\alpha].$$

同样可证：$[\alpha]\circ[c_{x_1}]=[\alpha]$.

(3) 据题设，令

$$F(s,t)=\begin{cases} \alpha(2st), & 0\leqslant s\leqslant 1/2, \\ \alpha(2t(1-s)), & 1/2\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

则 $F: I\times I\to X$ 是连续映射，且

$$F(s,0)=\begin{cases} \alpha(0)=x_0, & 0\leqslant s\leqslant 1/2, \\ \alpha(0)=x_0, & 1/2\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

$$= c_{x_0}(s).$$

$$F(s,1) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ \alpha(2-2s) = \bar{\alpha}(2s-1), & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$
$$= (\alpha * \bar{\alpha})(s).$$

$$F(0,t) = \alpha(0) = x_0,$$
$$F(1,t) = \alpha(0) = x_0.$$

所以，F 是连接道路 c_{x_0} 与 $\alpha * \bar{\alpha}$ 之间的道路同伦，即

$$c_{x_0} \underset{P}{\simeq} \alpha * \bar{\alpha},$$

从而得

$$[c_{x_0}] = [\alpha] \circ \overline{[\alpha]}.$$

同样可证：

$$\overline{[\alpha]} \circ [\alpha] = [c_{x_1}].$$



习　题

1. 试在某空间 X 中给出三道路 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，使得 $\alpha_1(1) = \alpha_2(0), \alpha_2(1) = \alpha_3(0)$，且满足下列二条件之一：

(1) $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3 = \alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3)$；

(2) $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3 \neq \alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3)$.

2. 设 $\alpha: I \to X$ 为一道路，而 $h: I \to I$ 为连续映射且满足 $h(0) = 0, h(1) = 1$，求证 $\alpha h \simeq \alpha$.

3. 设有 I 的一个分割 $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 = 1$ 及道路 $\alpha: I \to X$，若定义 $\alpha_1(t) = \alpha((1-t)t_0 + tt_1), \alpha_2(t) = \alpha((1-t)t_1 + tt_2)$，求证

$$\alpha_1 * \alpha_2 \simeq \alpha.$$

你还能将上面结论推广吗？试试看！

4. 设 $X = U_1 \cup U_2$，而 U_1, U_2 均为 X 的开子集，求证 X 中的任一道路类$[\alpha]$均可表为

$$[\alpha] = [\alpha_1] \circ [\alpha_2] \circ \cdots \circ [\alpha_n],$$

这里每 α_i 要么是 U_1 中的道路，要么是 U_2 中的道路.

5. (1) 证明：若 $h:(0,1)\to(0,1)$是同胚，则存在唯一的扩张同胚 $f:[0,1]\to[0,1]$.

(2) 证明：若 $f:[0,1]\to[0,1]$是同胚，则

$$f(\{0\},\{1\})=\{0,1\}.$$

(3) 设 $\alpha,\beta:[0,1]\to X$ 均为同胚道路，且 $\alpha([0,1])=\beta([0,1])$，则要么 $\alpha\simeq\beta$，要么 $\alpha\simeq\bar{\beta}$.

(4) 设 α,β 均为 X 中的闭道路，且 $\alpha|(0,1),\beta|(0,1)$ 均为同胚，证明：若 $\alpha([0,1])=\beta([0,1])$且 $\alpha(\{0,1\})=\beta(\{0,1\})$. 则 $\alpha\simeq\beta$ 或 $\alpha\simeq\bar{\beta}$.

6. 设 $\alpha:[0,1]\to X,\beta:[0,1]\to Y$ 分别是在基点 $x_0\in X$ 和 $y_0\in Y$ 的二闭路(参看定义 4.3.1)，而设 $i:X\to X\times Y,i(x)=(x,y_0)$，$j:Y\to X\times Y,j(y)=(x_0,y)$为二含入，证明$(i\alpha)*(j\beta)$和$(j\beta)*(i\alpha)$在 $X\times Y$ 中是等价的.

4.3 基 本 群

4.3.1 定义 设 $\alpha:I\to X$ 是拓扑空间 X 中一条道路，若 $\alpha(0)=\alpha(1)=x_0\in X$，则称 α 为 X 中以 x_0 为基点的一条**闭路**或**回路**. 拓扑空间 X 中的都以 x_0 为基点的两条闭路 α 与 β 称作**等价**的，或**闭路同伦**的，如果 α 与 β 作为道路是等价的. 仍以 $\alpha\underset{P}{\simeq}\beta$ 记之.

4.3.2 定理 设 X 为拓扑空间，$x_0\in X$，令

$$\Omega(X,x_0):=\{\alpha;\alpha\text{ 是 }X\text{ 中以 }x_0\text{ 为基点的闭路}\},$$

$$[\alpha]:=\{\beta\in\Omega(X,x_0);\alpha\underset{P}{\simeq}\beta\},$$

$$\pi_1(X,x_0):=\{[\alpha];\alpha\in\Omega(X,x_0)\}.$$

则 $\pi_1(X,x_0)$在道路类乘法运算$\circ$下构成一个群，称其为拓扑空间

X 的以 x_0 点为基点的**基本群**,或 **1 维同伦群**.

证明 据定理 4.2.10 即可得证. ■

注 $\pi_1(X,x_0)$未必是 Abel 群.

4.3.3 定理 设 X 为道路连通拓扑空间,则对于任意的 x_0, $x_1 \in X$,有

$$\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1).$$

证明 因为拓扑空间 X 是道路连通的,所以对于任意两点 $x_0, x_1 \in X$,存在道路

$$\omega: I \to X,$$

使得 $\omega(0)=x_0, \omega(1)=x_1$.

设$[\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$,令

$$\omega_\#([\alpha]) := [\overline{\omega}] \circ [\alpha] \circ [\omega] \in \pi_1(X,x_1),$$

则 $\omega_\#: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1)$为一映射.

若$[\alpha],[\beta] \in \pi_1(X_1,x_0)$,则

$$\begin{aligned}
\omega_\#([\alpha] \circ [\beta]) &= \omega_\#([\alpha * \beta]) \\
&= [\overline{\omega}] \circ [\alpha * \beta] \circ [\omega] \\
&= [\overline{\omega}] \circ ([\alpha] \circ [\beta]) \circ [\omega] \\
&= [\overline{\omega}] \circ [\alpha] \circ [\omega] \circ [\overline{\omega}] \circ [\beta] \circ [\omega] \\
&= \omega_\#([\alpha]) \circ \omega_\#([\beta]),
\end{aligned}$$

所以 $\omega_\#: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1)$是群同态;

同理可证:

$$\overline{\omega}_\#: \pi_1(X,x_1) \to \pi_1(X,x_0) \text{ 也是群同态.}$$

又若$[\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$,则

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_\#(\omega_\#([\alpha])) &= \overline{\omega}_\#([\overline{\omega}] \circ [\alpha] \circ [\omega]) \\
&= [\overline{\overline{\omega}}] \circ [\overline{\omega}] \circ [\alpha] \circ [\omega] \circ [\overline{\omega}] = [\alpha],
\end{aligned}$$

所以 $$\overline{\omega}_\# \omega_\#: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$$

是恒等同构；

同理可证：

$$\omega_{\#}\ \overline{\omega}_{\#}: \pi_1(X,x_1) \to \pi_1(X,x_1)$$

也是恒等同构.

以上表明

$$\omega_{\#}: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1)$$

与

$$\overline{\omega}_{\#}: \pi_1(X,x_1) \to \pi_1(X,x_0)$$

是互逆群同构，即

$$\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1). \qquad \blacksquare$$

注 当 X 是道路连通的拓扑空间时，作为不依赖于基点的抽象群 $\pi_1(X)$，称为 X 的**基本群**.

4.3.4 定理 设 $f: X \to Y$ 是连续映射，$x_0 \in X$，对于$[\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$，令

$$f_*([\alpha]) := [f\alpha],$$

则

$$f_*: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,f(x_0))$$

是群同态，称其为 ***f* 诱导的基本群同态**.

证明 设$[\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$，对于 $\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha]$，则存在连接闭路 α_1 与 α_2 的闭路同伦 F，即

$$\alpha_1 \overset{F}{\underset{P}{\simeq}} \alpha_2.$$

令 $H = fF$，则 $H: I \times I \to Y$ 是连续映射，且是联结以 $f(x_0)$为基点的 Y 中闭路 $f\alpha_1$ 与 $f\alpha_2$ 的闭路同伦，即

$$f\alpha_1 \overset{H}{\underset{P}{\simeq}} f\alpha_2.$$

所以$[f\alpha_1] = [f\alpha_2]$. 此表明

$$f_*([\alpha]) = [f\alpha]$$

的定义是合理的，即

$$f_*: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,f(x_0))$$

是一映射.

任取$[\alpha],[\beta]\in\pi_1(X,x_0)$，则

$$f_*([\alpha]\circ[\beta])=f_*([\alpha*\beta])=[f(\alpha*\beta)]=[f\alpha*f\beta]$$
$$=[f\alpha]\circ[f\beta]=f_*([\alpha])\circ f_*([\beta]).$$

所以 $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,f(x_0))$是群同态. ■

4.3.5 定理 设 X,Y,Z 均为拓扑空间，且 $x_0\in X$，则

(1)恒等映射 $I_X:X\to X$ 诱导出的同态

$$(I_X)_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$$

是恒等同构；

(2) 若 $f:X\to Y,g:Y\to Z$ 均为连续映射，则 $gf:X\to Z$ 诱导出的同态

$$(gf)_*=g_*f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,gf(x_0)).$$

证明 直接验证即得. ■

4.3.6 引理 设 X 是拓扑空间，且

$$F:I\times I\to X$$

是连续映射，令

$$\alpha(t)=F(0,t),$$
$$\beta(s)=F(s,0),$$
$$\gamma(t)=F(1,t),$$
$$\delta(s)=F(s,1).$$

则 $\bar{\alpha}*\beta*\gamma\underset{P}{\simeq}\delta$，即 $\bar{\alpha}*\beta*\gamma$ 与 δ 是拓扑空间 X 中的等价道路.

证明 据题设，令

$$H(s,t)=\begin{cases}F(0,1-2s), & 0\leqslant s\leqslant\dfrac{1-t}{2},\\ F\left(\dfrac{4s-2(1-t)}{1+3t},t\right), & \dfrac{1-t}{2}\leqslant s\leqslant\dfrac{3+t}{4},\\ F(1,4s-3), & \dfrac{3+t}{4}\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

则 $H: I\times I\to X$ 是连续映射，且

$$H(s,0)=\begin{cases}F(0,1-2s)=\alpha(1-2s), & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2},\\ F(4s-2,0)=\beta(4s-2), & 1/2\leqslant s\leqslant \frac{3}{4},\\ F(1,4s-3)=\gamma(4s-3), & 3/4\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

$$=(\bar{\alpha}*(\beta*\gamma))(s),$$

$$H(s,1)=\begin{cases}F(0,1-2s), & s=0,\\ F(s,1), & 0\leqslant s\leqslant 1,\\ F(1,4s-3), & s=1.\end{cases}$$

$$=\delta(s),$$

$$H(0,t)=F(0,1)=\alpha(1)=\bar{\alpha}(0)=\delta(0),$$

$$H(1,t)=F(1,1)=\gamma(1)=\delta(1).$$

所以 H 是连接 X 中道路 $\bar{\alpha}*(\beta*\gamma)$ 与 δ 之间的道路同伦，即

$$\bar{\alpha}*(\beta*\gamma)\overset{H}{\underset{p}{\simeq}}\delta.$$ ■

4.3.7 定理 设 $f_0,f_1: X\to Y$ 都是连续映射，且 $x_0\in X$. 若 $f_0\overset{F}{\simeq}f_1: X\to Y$，则

$$f_{1*}=\omega_{\#}f_{0*}: \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,f_1(x_0)),$$

其中 $\omega: I\to Y$ 是由 $\omega(t)=F(x_0,t)$ 确定的拓扑空间 Y 中以 $\omega(0)=F(x_0,0)$ 为始点，$\omega(1)=F(x_0,1)$ 为终点的一条道路.

证明 据题设，对 X 中任一以 x_0 为基点的闭路 α，令

$$H(s,t):=F(\alpha(s),t),$$

则 $H: I\times I\to Y$ 是连续映射，且

$$H(0,t)=F(\alpha(0),t)=F(x_0,t)=\omega(t),$$

$$H(1,t)=F(\alpha(1),t)=F(x_0,t)=\omega(t),$$

$$H(s,0)=F(\alpha(s),0)=f_0\alpha(s),$$

$$H(s,1)=F(\alpha(s),1)=f_1\alpha(s).$$

据引理得

$$\bar{\omega} * f_0\alpha * \omega \underset{P}{\overset{H}{\simeq}} f_1\alpha.$$

所以群同态 $f_{1*}=\omega_\# f_{0*}$. ■

习 题

1. 证明平庸拓扑空间与离散拓扑空间在任一点的基本群均是平凡群.

2. 设 $f: X\to Y$ 连续, $x_i\in X$, $y_i=f(x_i)$, $i=1,2$, 记 ω 是从 x_0 到 x_1 的道路类, 证明下面同态图可换

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y,f(x_0)) \\ \downarrow \omega_\# & & \downarrow (f\omega)_\# \\ \pi_1(X,x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y,f(x_1)). \end{array}$$

3. 令 $[S^1,p;X,x_0]$ 表示所有映射 $f:(S^1,p)\to(X,x_0)$ 相对 p 的同伦类集合. 试在该集合中引进乘法运算使之成为一个群, 且这个群与 $\pi_1(X,x_0)$ 同构, 其中 $p=\{1\}\in S^1$.

4. 证明空间 X 中的两条从 x 到 y 的道路 ω,η 给出从 $\pi_1(X,x)$ 到 $\pi_1(X,y)$ 的相同同构 $\Leftrightarrow[\omega * \bar{\eta}]$ 属于 $\pi_1(X,x_0)$ 的中心.

5. 设 A 是 X 的一个道路连通分支, $x_0\in A$, $i: A\to X$ 为含入, 则

$$i_*: \pi_1(A,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$$

是同构.

6. **拓扑群** G 是指其兼有拓扑与群两种结构, 使得乘积运算和求逆运算均是 G 到其自身的连续映射. 对于 G 的以单位元 e 为基点的闭路 α,β, 规定 $\alpha\circ\beta(t)=\alpha(t)\cdot\beta(t)$, 证明

$$\alpha * \beta\simeq\alpha\circ\beta\simeq\beta * \alpha(\mathrm{rel}(0,1)),$$

从而推出 $\pi_1(G,e)$ 是 Abel 的.

7. 设 $x_0 \in X$,假设∃连续映射 $\mu: X\times X \to X$,使得 $\mu(x,x_0) = \mu(x_0,x) = x$,对 $\forall x \in X$. 证明:若 $\alpha,\beta:[0,1]\to X$ 是在基点 x_0 处的二闭路,且 $i,j: X\to X\times Y$ 为满足 $i(x)=(x,x_0)$, $j(x)=(x_0,x)$的二含入,则

$$\mu((i\alpha)*(j\beta)) = \alpha*\beta.$$

并证明 $\pi_1(X,x_0)$是 Abel 的.

4.4 伦型不变性·简单应用

4.4.1 定理 若 $f: X\simeq Y$,即拓扑空间 X 与 Y 有相同伦型,且 f 是从拓扑空间 X 到 Y 的一个同伦等价,则 f 的诱导同态

$$f_*: \pi_1(X,x_0)\to \pi_1(Y,f(x_0))$$

是群同构,其中 $x_0\in X$.

证明 设 $g: Y\to X$ 是同伦等价 f 的逆,则

$$gf\simeq I_X: X\to X,$$

$$fg\simeq I_Y: Y\to Y$$

从图表:

$$\begin{array}{ccc} (X,x_0) & \xrightarrow{f} & (Y,y_0) \\ & \swarrow g & \\ (X,x_1) & \xrightarrow{f} & (Y,y_1), \end{array}$$

其中 $y_0=f(x_0)$, $x_1=g(y_0)$, $y_1=f(x_1)$,

得相应的诱导同态表:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y,y_0) \\ & \swarrow g_* & \\ \pi_1(X,x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y,y_1). \end{array}$$

另外从 $gf \simeq I_X: X \to X$ 与 $gf(x_0)=x_1$ 得

$$g_* f_* = (gf)_* = \omega_\#(I_X)_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1)$$

是群同构，其中 ω 是 X 中以 x_0 为始点，x_1 为终点的一条道路(参看定理 4.3.7).

从 $fg \simeq I_Y: Y \to Y$ 与 $fg(y_0)=y_1$，得

$$f_* g_* = (fg)_* = \omega'_\#(I_Y)_* : \pi_1(Y,y_0) \to \pi_1(Y,y_1)$$

是群同构，其中 ω' 是 Y 中以 y_0 为始点，y_1 为终点的一条道路.

综合上述，则得到

$$g_* : \pi_1(Y,y_0) \to \pi_1(X,x_1)$$

是群同构，所以

$$f_* = (g_*)^{-1}\omega_\# : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$$

是群同构. ■

4.4.2 推论 设拓扑空间 X 与 Y 有相同的伦型，即 $X \simeq Y$，若 X 与 Y 都是道路连拓扑空间，则

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y).$$

因此，对于道路连通的拓扑空间来说，拓扑空间的基本群是伦型不变量，当然也是拓扑不变量.

4.4.3 定义 若拓扑空间 X 是道路连通的，且 X 的基本群 $\pi_1(X)$ 是平凡群(零元群)，则称拓扑空间 X 是**单连通**的.

4.4.4 定理 可压缩空间是单连通的.

证明 设 X 为可压缩空间，任意取定一点 $x_0 \in X$，记

$$c_{x_0} : X \to X$$

为常值映射，使得 $c_{x_0}(X)=x_0$，则

$$I_X \overset{F}{\simeq} c_{x_0} : X \to X,$$

其中 $F: X \times I \to X$ 是连接恒等映射与常值映射 c_{x_0} 之间的同伦.

对于任意点 $x\in X$，令

$$\alpha_x(t):=F(x,t),$$

则 $\alpha_x: I\to X$ 是拓扑空间 X 中以 $\alpha_x(0)=F(x,0)=x$ 为始点，以 $\alpha_x(1)=F(x,1)=x_0$ 为终点的一条道路. 于是对于任意两点 x_1，$x_2\in X$，则

$$\alpha_{x_1}*\overline{\alpha}_{x_2}: I\to X$$

就是拓扑空间 X 中以 x_1 为始点，x_2 为终点的一条道路，所以，拓扑空间 X 是道路连通的.

由题设，X 是可压缩的，所以 X 与独点空间 pt 有相同的伦型. 而独点空间 pt 与拓扑空间 X 都是道路连通的，由上面推论 4.4.2 可知

$$\pi_1(X)\cong\pi_1(pt).$$

由于独点空间 pt 的基本群是平凡群，所以拓扑空间 X 的基本群 $\pi_1(X)$ 也是平凡群.

综上可知，可压缩空间是单连通的. ■

4.4.5 推论　n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 是单连通的.

4.4.6 定义　设 X 是拓扑空间，A 是 X 的子空间.

(1) 若恒等映射 $I_A: A\to A$ 能扩张为连续映射 $r: X\to A$，即存在连续映射 $r: X\to A$ 使得 $r|A=I_A$，则称 A 为 X 的**收缩核**，$r: X\to A$ 称为一个**收缩映射**.

(2) 设 A 是拓扑空间 X 的收缩核，$r: X\to A$ 为收缩映射，若

$$I_X\simeq ir: X\to X,$$

其中 $i: A\to X$ 为含入映射，则称 A 为拓扑空间 X 的**形变收缩核**，$r: X\to A$ 称为**形变收缩映射**.

(3) 设 A 是拓扑空间 X 的形变收缩核，$r: X\to A$ 是形变收缩映射，若连接映射 I_X 与 ir 的同伦 $F: X\times I\to X$ 满足：对于任意 $a\in A$ 与 $t\in I$，有

$$F(a,t) = a \in A,$$

则称 A 为拓扑空间 X 的**强形变收缩核**，$r: X \to A$ 称为**强形变收缩映射**.

4.4.7 定理 设 A 是拓扑空间 X 的形变收缩核，$r: X \to A$ 是形变收缩映射，则子空间 A 与拓扑空间 X 有相同伦型，且

$$r_*: \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(A,r(x_0)),$$

$$i_*: \pi_1(A,a_0) \cong \pi_1(X,i(a_0)),$$

其中 $i: A \to X$ 是含入映射，$x_0 \in X, a_0 \in A$.

证明 据题设 $ir \simeq I_X: X \to X$，但

$$ri = I_A: A \to A.$$

所以，$r: X \to A$ 是同伦等价映射，$i: A \to X$ 是同伦等价映射 r 的逆. 因此子空间 A 与拓扑空间 X 有相同伦型，即 $A \simeq X$，从定理 4.4.1 即得

$$r_*: \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(A,r(x_0)),$$

$$i_*: \pi_1(A,a_0) \simeq \pi_1(X,i(a_0)).$$ ■

4.4.8 定理 设 D^2 与 S^1 分别表示 2 维圆盘与(它的边界)1 维球面，则 S^1 上的恒等映射

$$I_{S^1}: S^1 \to S^1$$

不能扩张成连续映射

$$r: D^2 \to S^1.$$

换言之，单位圆 S^1 不是单位圆盘 D^2 的收缩核.

证明

若有收缩映射

$$r: D^2 \to S^1$$

使得 $r|S^1 = I_{S^1}: S^1 \to S^1$，则

$$ri = I_{S^1}: S^1 \to S^1,$$

其中 $i: S^1 \to D^2$ 为含入映射，于是

$$(ri)_* = r_* i_* = (I_{S_1})_*:$$

$$\pi_1(S^1, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2, a_0) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1, a_0)$$

是恒等同构，其中 $a_0 \in S^1$. 但是 $\pi_1(D^2, a_0)$是平凡群，$\pi_1(S^1, a_0) \neq 0$，这表明$(ri)_*$不能为恒等同构，矛盾. ■

最后给出著名的 Brouwer 不动点经典定理当 $n=2$ 的情形，而到第 6 章，我们将有能力给出该定理的一般情形.

4.4.9 定理 单位圆盘 D^2 上的连续映射

$$f: D^2 \to D^2$$

必有不动点，即至少存在一点 $x_0 \in D^2$，使得

$$f(x_0) = x_0.$$

证明 假设没有这样的点，则对任意点 $x \in D^2$，有向线段 $\overrightarrow{f(x)x}$的延长线交 D^2 的边界 S^1 于一点 x^*，令

$$g(x) := x^*$$

则 $g: D^2 \to S^1$ 是连续映射，且 $g | S^1 = I_{S^1}: S^1 \to S^1$，这与定理 4.4.8 矛盾. ■

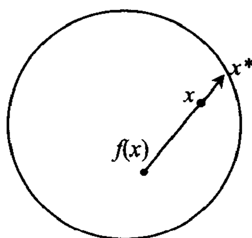


图 4.4.1

习　题

1. 证明：若 X 连通，则 $\pi_1(X\times I)\cong\pi_1(X)$.

2. 证明：(1)当 $n>2$ 时，$\boldsymbol{R}^2\not\cong\boldsymbol{R}^n$；(2)当 $n>2$ 时 $D^2\not\cong D^n$.

3. 设 X 是 Möbius 带，$A\subset X$ 是其边界，试问含入映射 $i:A\to X$ 的诱导同态 $i_*:\pi_1(A,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$是同构吗？为什么？

4. 设 A 是空间 X 的形变收缩核，其形变收缩为 $r:X\to A$；假若 $i_*\pi_1(A,a)$是 $\pi_1(X,a)$的正规子群，求证 $\pi_1(X,a)$是 $\mathrm{Im}i_*$与 $\mathrm{Ker}r_*$的直积.

5. 设 $f:D^2\to D^2$ 连续，且 $f|S^1=I_{S^1}$，证明 f 必是满的.

第5章 覆盖空间

5.1 覆盖空间

5.1.1 定义 设E,B都是拓扑空间,$p:E\to B$是映射,若

(1) $p:E\to B$是连续满映射;

(2) 对于$b\in B$,存在b点的开邻域U使得$p^{-1}(U)=\bigcup_{j\in J}V_j$,其中$\{V_j;j\in J\}$是$E$的开子集族,且满足:当$j\neq k$时,$V_j\cap V_k=\emptyset$,以及对于$j\in J$,$p|V_j:V_j\to U$是同胚.则称$p:E\to B$为**覆盖映射**(或**复迭映射**),$B$为**底空间**,$E$为底空间$B$上的**覆盖空间**(或**复迭空间**),记作$(E,p)$. U,$V_j(j\in J)$分别称为拓扑空间B与E中的**典型邻域**,或**可允许邻域**.

5.1.2 定理 设$p:E\to B$是覆盖映射,则

(1)对于$b\in B$,$p^{-1}(b)$是拓扑空间E的离散子空间;

(2) 覆盖映射$p:E\to B$是局部同胚的,即对于每一点$x\in E$,存在x点的开邻域V,使得

$$p\mid V:V\to p(V)$$

是同胚.

证明 直接验证即得. ■

例1 设$\boldsymbol{R}^1$为1维欧氏空间,S^1为单位圆周,对于$t\in\boldsymbol{R}^1$,令

$$p(t)=(\cos2\pi t,\sin2\pi t)\in S^1,$$

则映射$p:\boldsymbol{R}^1\to S^1$是覆盖映射,其中,$S^1$上任意开弧都可以作为

典型邻域,作为例子取(1,0)点的邻域

$$U=\{(x,y)\in S^1;x>0\},$$

则

$$p^{-1}(U)=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}\left(n-\frac{1}{4},n+\frac{1}{4}\right).$$

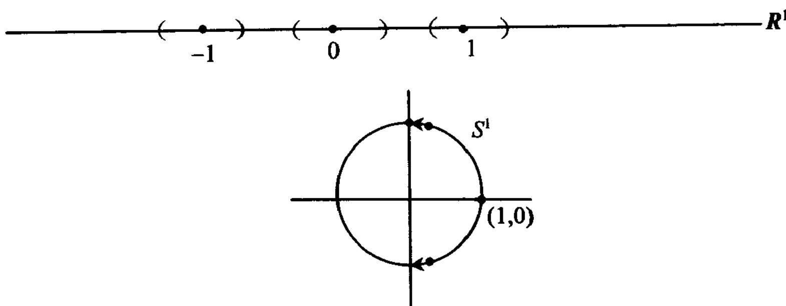


图 5.1.1

例 2 将 2 维球面 S^2 的对径点粘合起来所得到的商空间是射影平面 P^2,记这个粘合映射为 p,则

$$p: S^2\to P^2$$

是覆盖映射.

例 3 设 $p: I\times I\to I$ 是映射,使得

$$p(s,t)=s,$$

则 $p: I\times I\to I$ 不是覆盖映射.

习 题

1. 设 $p: E\to B$ 为覆盖映射,则 B 的所有可能的可允许邻域组成的集族是 B 的一拓扑基.

2. 设 $\widetilde{X}$ 是拓扑空间 X 与一离散空间的积,则投影 $p: \widetilde{X}\to X$ 是一覆盖映射.

3. 设 $p_i: E_i \to B_i, i=1,2$ 为二覆盖映射，则 $p_1 \times p_2: E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ 也是覆盖映射.

4. 证明覆盖映射 $p: E \to B$ 是开映射.

5. 下列二映射是覆盖映射吗？为什么？

(1) 对实数 $a<b, p:(a,b) \to S^1$ 为 $p(x)=e^{2\pi x}$；

(2) $p: [a,b] \to S^1$ 为 $p(x)=e^{2\pi x}$.

6. 设 X 是道路连通且局部道路连通空间，$f: X \to X$ 为周期等于 n 的同胚，且假定当 $m<n$ 时，f^m 没有不动点. 记 f 的轨道空间为 X/f，求证投影 $p: X \to X/f$ 是覆盖映射.

5.2 覆盖空间的基本性质

5.2.1 定义 设 $p: E \to B$ 是覆盖映射，又设 $f: X \to B$ 是连续映射，若存在连续映射 $\tilde{f}: X \to E$，使得

$$p\tilde{f} = f,$$

则称 $\tilde{f}$ 是 f 的**提升**.

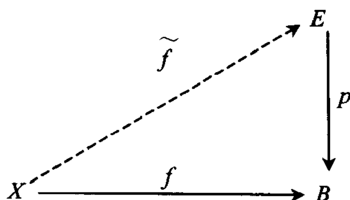


图 5.2.1

覆盖映射的主要性质表现为道路提升与同伦提升，即道路覆盖性质与同伦覆盖性质.

5.2.2 定理(道路提升定理) 设 $p: E \to B$ 是覆盖映射，$e_0 \in$

$E, p(e_0)=b_0$.若道路 $\alpha: I\to B$,使得 $\alpha(0)=b_0$,则道路 α 存在唯一的提升$\tilde{\alpha}: I\to E$,使得 $\tilde{\alpha}(0)=e_0$.

证明 底空间 B 中全体典型邻域作成的集合,记作$\{U_i;\ i\in\Omega\}$,显然是 B 的一个开覆盖,因为 $\alpha: I\to B$ 是连续的,从而

$$\{\alpha^{-1}(U_i);\ i\in\Omega\}$$

是 I 的一个开覆盖,但 I 是紧致的质量空间,因此存在 Lebesgue 数 ε,使得对于 I 的一个分割:

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$$

满足 $t_{k+1}-t_k<\varepsilon$ 时,有 $j_k\in\Omega$,使得

$$[t_k, t_{k+1}]\subset\alpha^{-1}(U_{j_k}).$$

从而

$$\alpha([t_k, t_{k+1}])\subset U_{j_k},\text{其中 } k=0,1,\cdots,n-1.$$

如图 5.2.2,现在逐步定义

$$\tilde{\alpha}: I\to E$$

如下:首先命

$$\tilde{\alpha}(t_0)=\tilde{\alpha}(0)=e_0,$$

则 $p\tilde{\alpha}(0)=\alpha(0)=b_0$,其次假设对于 $t\in[0,t_k](0\leqslant k\leqslant n)$,

$$\tilde{\alpha}: [0,t_k]\to E$$

有定义,且满足

$$\tilde{\alpha}(t_0)=e_0,$$

$$p\tilde{\alpha}=\alpha\mid[0,t_k]$$

以及这样的提升 $\tilde{\alpha}$ 是唯一确定的. 而对于 $[t_k, t_{k+1}]$,因为 $\alpha([t_k, t_{k+1}])\subset U_{j_k}$,于是在 E 中有典型邻域 $V_k\subset p^{-1}(U_{j_k})$,使得

$$\tilde{\alpha}(t_k)\in V_k,$$

且

$$p\mid V_k: V_k\to U_{j_k}$$

是同胚.

令 $\tilde{\alpha}(t):=(p|V_k)^{-1}\alpha(t)$,其中 $t\in[t_k, t_{k+1}]$,则

$$\tilde{\alpha}: [t_k, t_{k+1}]\to E$$

是连续的，据粘接引理，得

$$\tilde{\alpha}:[0,t_{k+1}]\to E$$

是连续的，且满足

$$\tilde{\alpha}(0)=e_0,$$

$$p\tilde{\alpha}=\alpha.$$

从 p 是局部同胚可得，$\tilde{\alpha}$ 是唯一确定的. 定理得证. ■

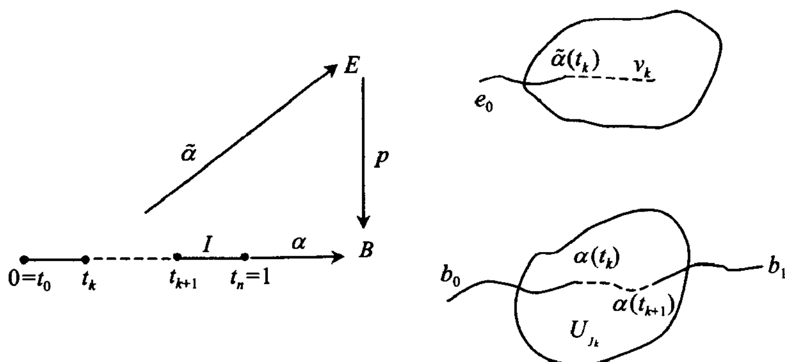


图 5.2.2

5.2.3 定理 设 $p:E\to B$ 是覆盖映射，若 B 是道路连通的，则对于 $b\in B$，集合 $p^{-1}(b)$ 具有相同基数.

证明 据定理 5.2.2 即可得证. ■

对于覆盖映射 $p:E\to B$，若 B 道路连通，且

$$\# p^{-1}(b)=n\ (\text{有限})$$

则称 E 是 B 的 n—层或 n—重覆盖空间. 例如 S^2 是射影平面 P^2 的 2—重覆盖空间.

5.2.4 定理(同伦提升定理) 设 $p:E\to B$ 是覆盖映射，$e_0\in$

E,且 $p(e_0)=b$. 若同伦 $F: I\times I\to B$ 使得 $F(0,0)=b_0$,则存在唯一的同伦 F 的提升

$$\widetilde{F}: I\times I \to E,$$

使得

$$\widetilde{F}(0,0) = e_0,$$

如图 5.2.3.

证明 同定理 5.2.2. ■

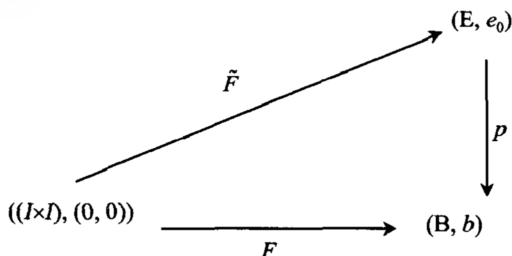


图 5.2.3

5.2.5 定理 设 $p: E\to B$ 是覆盖空间,$e_0\in E$,$p(e_0)=b_0$,设 α,β 是底空间 B 中从 b_0 到 b_1 的两条道路,又设 $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ 分别是道路 α,β 在 E 中的提升,且 $\tilde{\alpha}(0)=\tilde{\beta}(0)=e_0$. 若 α 与 β 是底空间 B 中的等价道路,则 $\tilde{\alpha}(1)=\tilde{\beta}(1)$,且 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 是 E 中的等价道路.

证明 设 $F: I\times I\to B$ 是连接道路 α 与 β 之间的道路同伦,则 $F(0,0)=b_0$,据定理 5.2.4 可知,存在同伦 F 的提升

$$\widetilde{F}: I\times I \to E$$

使得 $\widetilde{F}(0,0)=e_0$.

令 $\tilde{\alpha}_1(s)=\widetilde{F}(s,0)$,则 $\tilde{\alpha}_1: I\to E$ 是道路,$\tilde{\alpha}_1(0)=\widetilde{F}(0,0)=e_0$,且 $p\tilde{\alpha}_1(s)=p\widetilde{F}(s,0)=F(s,0)=\alpha(s)$,此表明 $\tilde{\alpha}_1$ 是 α 的提升,且 $\tilde{\alpha}_1(0)=e_0$. 由道路提升的唯一性,得 $\tilde{\alpha}_1=\tilde{\alpha}$,所以 $\widetilde{F}(s,0)=\tilde{\alpha}(s)$. 同理可证:$\widetilde{F}(s,1)=\tilde{\beta}(s)$.

令 $\tilde{\gamma}(t)=\widetilde{F}(0,t)$,则 $\tilde{\gamma}: I\to E$ 是 E 中的道路,$\tilde{\gamma}(0)=\widetilde{F}(0,0)$

$=e_0$，且 $p\tilde{\gamma}(t)=p\tilde{F}(0,t)=F(0,t)=b_0$. 这表明 E 中道路 $\tilde{\gamma}$ 是 B 中常道路

$$c_{b_0}: I \to B$$

的提升，其中 $c_{b_0}(I)=b_0$. 但 $\tilde{\gamma}(0)=e_0$，因此据道路提升的唯一性可知 $\tilde{\gamma}$ 是 E 中的常道路，且 $\tilde{\gamma}(t)=\tilde{F}(0,t)=e_0$.

令 $\tilde{\delta}(t)=\tilde{F}(1,t)$，同理可证 $\tilde{\delta}$ 必为 E 中的常道路，且 $\tilde{\alpha}(1)=\tilde{F}(1,0)=\tilde{F}(1,1)=\tilde{\beta}(1)$.

综合上述则得 $\tilde{F}$ 是连接 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 的道路同伦，即 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 是 E 中的等价道路. ■

5.2.6 定理 设 $p: E\to B$ 是覆盖映射，$e_0\in E$，且 $p(e_0)=b_0$，则由 p 诱导出的同态

$$p_*: \pi_1(E,e_0) \to \pi_1(B,b_0)$$

是单的.

证明 由定理 5.2.5 即得证. ■

习 题

1. 设 $p: E\to B$ 是覆盖映射，X 连通，求证：从 X 到 B 的常值映射的提升也一定是常值映射.

2. 设 $p: E\to B$ 是覆盖映射，U 是 B 的道路连通开集，且含入 $i: U\to B$ 诱导的基本群同态 $i_*: \pi_1(U)\to\pi_1(B)$是平凡的，求证 U 是可允许邻域.

3. 找出 Klein 瓶 K 的 1 个双层覆盖：

$$p: S^1\times S^1 \to K.$$

4. 设有覆盖映射 $p: S^2\to P^2$，证明若 C 是 P^2 中的简单闭曲线(同胚于 S^1 的曲线)，则 $p^{-1}(C)$要么是 S^2 中的简单闭曲线，要么是两不交简单闭曲线之并.

5. 设 $p: E\to B$ 是覆盖映射，而 E 道路连通且局部道路连通，

求证若 B 单连通，则 E 也单连通.

5.3 n 维球面 S^n 的基本群

5.3.1 定理 圆周 S^1 的基本群是无限循环群.

证明 设 S^1 为单位圆周，$b_0=(1,0)\in S^1$，对于 $x\in \boldsymbol{R}^1$，令

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \in S^1,$$

则 $p: \boldsymbol{R}^1 \to S$ 是覆盖映射，且

$$p^{-1}(b_0) = \{0, \pm 1, \cdots\}.$$

(1) 任取$[\alpha]\in \pi_1(S^1,b_0)$，设道路 α 的提升为 $\tilde{\alpha}: I\to \boldsymbol{R}^1$，且 $\tilde{\alpha}(0)=0$，则

$$\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(b_0) = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} = Z.$$

不妨设 $\tilde{\alpha}(1)=n$，令

$$\Phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) = n,$$

则

$$\Phi: \pi_1(S^1, b_0) \to Z \text{ 是映射(单值对应)}.$$

(2) 任取 $n\in Z-p^{-1}(b_0)$，因为 $\boldsymbol{R}^1$ 是道路连通的，所以存在 $\boldsymbol{R}^1$ 中道路

$$\tilde{\alpha}: I \to \boldsymbol{R}^1,$$

使得，$\tilde{\alpha}(0)=0$，$\tilde{\alpha}(1)=n$，令 $\alpha=p\tilde{\alpha}$，则

$$\alpha: I \to S^1$$

是 S^1 中的闭路，且以 $b_0=\alpha(0)=\alpha(1)$为基点，因此

$$[\alpha] \in \pi_1(S^1, b_0).$$

但是道路 $\tilde{\alpha}$ 是底空间 B 中道路 α 在 $\boldsymbol{R}^1$ 中的提升，且 $\tilde{\alpha}(0)=0$，所以据 Φ 的定义可得

$$\Phi([\alpha]) = n,$$

即 $\Phi: \pi_1(S^1,b_0)\to Z$ 是满射.

(3) 设$[\alpha]$，$[\beta]\in \pi_1(S^1,b_0)$，若

$$\Phi([\alpha]) = \Phi([\beta]),$$

不妨设 $\tilde{\alpha}$,$\tilde{\beta}$ 分别是 S^1 中道路 α 与 β 在 $\boldsymbol{R}^1$ 中的提升,且

$$\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = 0,$$

所以

$$\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1).$$

因为 $\boldsymbol{R}^1$ 是单连通的,从而可知 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 是等价道路. 设连接道路 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 的同伦为 $\tilde{F}$,令

$$F = p\tilde{F},$$

则 F 是连接 S^1 中闭路 α 与 β 的道路同伦,从而 α 与 β 是 S^1 中的等价闭路,即$[\alpha]=[\beta]$. 由此可知 $\Phi:\pi_1(S^1,b_0)\to Z$ 是单射.

(4) 设$[\alpha]$,$[\beta]\in\pi_1(S^1,b_0)$,又设 $\tilde{\alpha}$ 与 $\tilde{\beta}$ 分别是 S^1 中闭路 α 与 β 在 $\boldsymbol{R}^1$ 中的提升,且 $\tilde{\alpha}(0)=\tilde{\beta}(0)=0$,记 $n=\tilde{\alpha}(1)$,$m=\tilde{\beta}(1)$,令

$$\tilde{h}(s) := \begin{cases} \tilde{\alpha}(2s), & 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ n + \tilde{\beta}(2s-1), & 1/2 \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

则 $\tilde{h}: I\to\boldsymbol{R}^1$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的道路,且 $\tilde{h}(0)=0$,$\tilde{h}(1)=n+m$,因为

$$\begin{aligned} p\tilde{h}(s) &= \begin{cases} p\tilde{\alpha}(2s); & 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ p(n+\tilde{\beta}(2s-1)), & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ p\tilde{\beta}(2s-1) = \beta(2s-1), & 0 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} \\ &= (\alpha * \beta)(s). \end{aligned}$$

所以,$\tilde{h}$ 是 S^1 中道路 $\alpha*\beta$ 在 $\boldsymbol{R}^1$ 中的提升,且 $\tilde{h}(0)=0$,据 Φ 的定义,得

$$\Phi([\alpha * \beta]) = \tilde{h}(1) = n + m = \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta])$$

于是得

$$\Phi([\alpha] \circ [\beta]) = \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta]).$$

这表明 $\Phi:\pi_1(S^1,b_0)\to Z$ 是群同态.

综合上述,得

$$\Phi : \pi_1(S^1, b_0) \to Z,$$

是群同构. 但是 S^1 是道路连通的,所以

$$\pi_1(S^1) \cong Z,$$

即圆周的基本群是无限循环群. ■

5.3.2 定理 设 $p: E \to B$ 是覆盖映射,$e_0 \in E$,且 $p(e_0)=b_0$. 若 E 是道路连通的,则存在一个满映射

$$\Phi: \pi_1(B,b_0) \to p^{-1}(b_0).$$

若 E 是单连通的,则 Φ 还是单的.

证明 同定理 5.3.1. ■

5.3.3 定理 穿孔平面 $\boldsymbol{R}^2\backslash\{0\}$的基本群是无限循环群.

证明 设 S^1 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中以 O 为圆心的单位圆周,任取 $x_0 \in S^1$,令

$$i: (S^1,x_0) \to (\boldsymbol{R}^2\backslash\{0\},x_0)$$

为含入映射,令

$$r: (\boldsymbol{R}^2\backslash\{0\};x_0) \to (S^1,x_0),$$

使得对于 $x \in \boldsymbol{R}^2\backslash\{0\}$,$r(x)=i\left(\frac{x}{\|x\|}\right)=\frac{x}{\|x\|}$(其中 $\|x\|$ 表示欧氏度量下从原点 O 到点 x 的距离),则 r 是形变收缩映射. 所以,i,r 分别诱导出的同态

$$i_*: \pi_1(S^1,x_0) \to \pi_1(\boldsymbol{R}^2\backslash\{0\},x_0)$$

与

$$r_*: \pi_1(\boldsymbol{R}^2\backslash\{0\},x_0) \to \pi_1(S^1,x_0) \cong Z$$

都是同构,从而得

$$\pi_1(\boldsymbol{R}^2\backslash\{0\},x_0) \cong Z.$$

但 $\boldsymbol{R}^2\backslash\{0\}$是道路连通的,所以

$$\pi_1(E^2\backslash\{0\}) \cong Z.$$ ■

5.3.4 引理 设 X 为拓扑空间,若 X 有一开覆盖$\{G_i;i\in\Omega\}$满足条件:

(1) $\bigcap G_i \neq \varnothing$;

(2) $G_i(i\in\Omega)$是单连通的；

(3) $G_i\cap G_j(i,j\in\Omega)$是道路连通的.

则拓扑空间 X 是单连通的.

证明 据假设条件(1)与(2),易证拓扑空间 X 是道路连通的.

任取点 $x_0\in\bigcap_{i\in\Omega}G_i$,设$[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$,其中 $\alpha: I\to X$ 是以 x_0 为基点的 X 中一条闭路,因为 $\alpha: I\to X$ 是连续的,且$\{G_i;i\in\Omega\}$是 X 的开覆盖,所以$\{\alpha^{-1}(G_i);\ i\in\Omega\}$是 I 的开覆盖,但 I 是紧致度量空间,因此存在一 Lebesgue 数 ε,使得对于 I 的分割

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$$

满足 $\alpha([t_k,t_{k+1}])\subset G_{i(k)}$,其中 $k=0,1,2\cdots,n-1,i(k)\in\Omega$. 对于 $s\in I$,令

$$\alpha_k(s)=\alpha((1-s)t_k+st_{k+1}),$$

则 $\alpha_k: I\to X$ 是 X 中一条道路,$k=0,1,\cdots,n-1$,并且

$$[\alpha]=[\alpha_0*\alpha_1*\cdots*\alpha_{n-1}].$$

因为

$$x_0\in\bigcap G_i\subset(G_{i(k-1)}\cap G_{i(k)}),$$
$$\alpha(t_k)\in G_{i(k-1)}\cap G_{i(k)},$$

以及 $G_{i(k-1)}\cap G_{i(k)}\neq\varnothing$ 是道路连通的,所以,存在道路

$$\beta_k: I\to X,k=1,2,\cdots,n-1,$$

使得 $\beta_k(0)=x_0,\beta_k(1)=\alpha(t_k)$,且 $\beta_k(I)\subset(G_{i(k-1)}\cap G_{i(k)})$.

而

$$\begin{aligned}[\alpha]&=[\alpha_0*\alpha_1*\cdots*\alpha_{n-1}]\\&=[\alpha_0*\beta_1^{-1}*\beta_1*\alpha_1*\beta_2^{-1}*\beta_2*\alpha_2*\cdots*\alpha_{n-2}*\beta_{n-1}^{-1}*\beta_{n-1}*\alpha_{n-1}]\\&=[\alpha_0*\beta_1^{-1}]\circ[\beta_1*\alpha_1*\beta_2^{-1}]\circ\cdots\circ[\beta_{n-2}*\alpha_{n-2}*\beta_{n-1}^{-1}]\circ[\beta_{n-1}*\alpha_{n-1}]\\&=[c_{x_0}]\circ[c_{x_0}]\circ\cdots\circ[c_{x_0}]\\&=[c_{x_0}],\end{aligned}$$

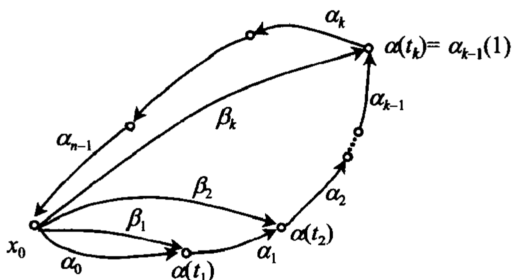


图 5.3.1

其中 $c_{x_0}: I \to X$ 是常道路，使得 $c_{x_0}(I) = x_0$，所以得

$$\pi_1(X, x_0) = \{0\}.$$

但 X 是道路连通的，于是得

$$\pi_1(X) = \{0\}.$$

即拓扑空间 X 是单连通的. ■

5.3.5 定理 n 维球面 $S^n (n \geqslant 2)$ 是单连通的.

证明 设 $S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ 是以原点 O 为圆心的 n 维单位球面，记

$$P = (0, 0, \cdots, 0, 1) \in \boldsymbol{R}^{n+1} \quad (P\text{:北极}),$$

$$Q = (0, 0, \cdots, 0, -1) \in \boldsymbol{R}^{n+1} \quad (Q\text{:南极}),$$

$$G_1 = S^n - \{P\},$$

$$G_2 = S^n - \{Q\},$$

则 $\{G_1, G_2\}$ 是 n 维球面 S^n 的一个开覆盖，且满足

(1) $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$;

(2) $G_i \quad i = 1, 2$ 都是单连通的;

(3) $G_1 \cap G_2$ 是道路连通的.

所以由引理 5.3.4 得，当 $n \geqslant 2$ 时，n 维球面 S^n 是单连通的.

■

5.3.6 定理 当 $n \geqslant 3$ 时，$\boldsymbol{R}^n - \{0\}$ 是单连通的.

证明 因为

(1) $\boldsymbol{R}^n-\{0\}$是道路连通的;

(2) S^{n-1}是$\boldsymbol{R}^n-\{0\}$的形变收缩核,从而得

$$\pi_1(\boldsymbol{R}^n-\{0\})\cong\pi_1(S^{n-1})=\{0\}\quad(n\geqslant 3),$$

即$\boldsymbol{R}^n-\{0\}$是单连通的. ■

5.3.7 推论 $\boldsymbol{R}^n(n\geqslant 3)$与$\boldsymbol{R}^2$不同胚.

习 题

1. 设有映射$f:S^1\to S^1$,$f(x)=-x$,试描述同态

$$f_*:\pi_1(S^1,1)\to\pi_1(S^1,-1).$$

2. 设$f:S^1\to S^1$, $f(x)=x^n$,$n\in Z$,试描述同态

$$f_*:\pi_1(S^1,1)\to\pi_1(S^1,1).$$

3. 证明:若$x\in\boldsymbol{R}^2$,U是x的邻域,则$U\backslash\{x\}$不单连通.

4. 设$p:E\to B$是覆盖映射,而E道路连通,若$x_0,x_1\in E$,则$\exists B$中从$p(x_0)$到$p(x_1)$的道路ω,使得

$$\omega_\# p_*\pi_1(E,x_0)=p_*\pi_1(E,x_1).$$

5.4 闭曲面的基本群

5.4.1 定理 2维球面的基本群是平凡群,即$\pi_1(S^2)\cong\{0\}$.

5.4.2 定理 设P^2为射影平面,则$\pi_1(P^2)\cong Z_2$.

证明 设

$$p:S^2\to P^2$$

为覆盖映射,因为2维球面S^2是单连通的,因此存在单满映射

$$\Phi:\pi_1(P^2,b_0)\to p^{-1}(b_0),$$

其中 $b_0 \in P^2$，但是 $p^{-1}(b_0)$ 只含两个元素，由此可得 $\pi_1(P^2, b_0)$ 是 2 阶群，而 2 阶群同构于 Z_2，从而

$$\pi_1(P^2) \cong Z_2.$$

5.4.3 定理 设 X, Y 均为拓扑空间，$x_0 \in X, y_0 \in Y$，则

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

证明 设 A、B 是两个群，群运算记作"·"，则群 A 与群 B 的直积定义如下：记

$$A \times B = \{a \times b;\ a \in A, b \in B\}.$$

在集合 $A \times B$ 中引入运算"·"：

$$(a \times b) \cdot (a' \times b') := (a \cdot a') \times (b \cdot b') \in A \times B,$$

则集合 $A \times B$ 就上述运算"·"构成一个群.

设 A, B 与 C 都是群，又设 $f: C \to A$ 与 $g: C \to B$ 都是群同态，令

$$\Phi(c) := f(c) \times g(c),$$

其中 $c \in C$，则 $\Phi: C \to A \times B$ 是群同态.

现在由假设可令

$$p: X \times Y \to X,$$

$$q: X \times Y \to Y$$

都是自然投射，则 p 与 q 分别诱出群同态

$$p_*: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0),$$

$$q_*: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(Y, y_0).$$

对于 $[\zeta] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$，令

$$\Phi([\zeta]) = p_*([\zeta]) \times q_*([\zeta])$$

$$- [p\zeta] \times [q\zeta].$$

则 $\Phi: \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ 是群同态.

设 $[\alpha] \times [\beta] \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$，其中 $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$，$[\beta] \in \pi_1(Y, y_0)$，于是

$$\alpha: (I, \partial I) \to (X, x_0)$$

与 $$\beta:(I,\partial I)\to(Y,y_0)$$
都是连续映射，对于 $t\in I$，令
$$\zeta(t):=(\alpha(t),\beta(t)),$$
则映射 $$\zeta:(I,\partial I)\to(X\times Y,(x_0,y_0))$$
是连续的，由此得
$$[\zeta]\in\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0)).$$
由于
$$\begin{aligned}&\Phi([\zeta])\\&=p_*([\zeta])\times q_*([\zeta])\\&=[p\zeta]\times[q\zeta]\\&=[\alpha]\times[\beta],\end{aligned}$$
所以群同态 Φ 是满的.

设$[\eta]\in\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))$，若
$$\Phi([\eta])=[p\eta]\times[q\eta]$$
是群 $\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$ 中的单位元素，则存在道路同伦 F 与 G，使得
$$p\eta\overset{F}{\underset{P}{\simeq}}c_{x_0}:(I,\partial I)\to(X,x_0),$$
$$q\eta\overset{G}{\underset{P}{\simeq}}c_{y_0}:(I,\partial I)\to(Y,y_0),$$
其中 c_{x_0}，c_{y_0} 都是 I 上常值映射. 令
$$H(s,t)=(F(s,t),G(s,t)),$$
则 $$H:(I\times I,\partial I\times I)\to(X\times Y,(x_0,y_0))$$
是连续映射，且
$$\eta\overset{H}{\simeq}c_{(x_0,y_0)}:(I,\partial I)\to(X\times Y,(x_0,y_0))$$
其中 $c_{(x_0,y_0)}$ 为 I 上的常值映射，这表明$[\eta]$是群 $\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))$ 的单位元，所以群同态 Φ 是单的.

综合上述，则得
$$\Phi:\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$$

是群同构. ■

5.4.4 定理 设 T^2 是环面，则 $\pi_1(T^2)\cong Z\times Z$.

证明 因为 $T^2=S^1\times S^1$，由定理 5.4.3 与前节定理 5.3.1 则得

$$\pi_1(T^2)\cong\pi_1(S^1)\times\pi_1(S^1)\cong Z\times Z.$$ ■

以上提到的拓扑空间的基本群都是 Abel 群，以下给出空间的基本群是非 Abel 群的例子.

例 1 8 字空间的基本群不是 Abel 群.

如图 5.4.1，记

$$S_1^1=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2;\ (x-1)^2+y^2=1\},$$
$$S_2^1=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2;\ (x+1)^2+y^2=1\},$$
$$B=S_1^1\vee S_2^1\quad(\text{为两个相切的圆}),$$
$$E=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2;x\text{ 或 }y\text{ 为整数}\}.$$

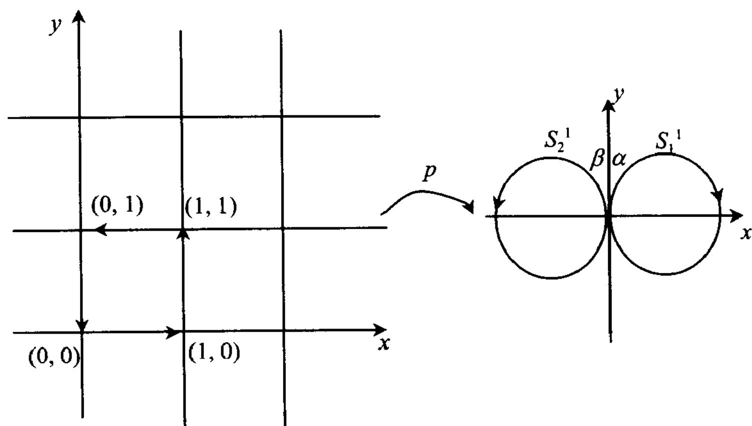


图 5.4.1

对于$(x,y)\in E$，命

$$p(x,y)=\begin{cases}(1+\cos(\pi-2\pi x),\sin 2\pi x), & y\text{ 为整数},\\ (-1+\cos 2\pi y,\sin 2\pi y), & x\text{ 为整数}.\end{cases}$$

即 p 将 E 中水平线映为 S_1^1，铅直线映为 S_2^1，则 $p: E \to B$ 为覆盖映射，所以，p 的诱导同态

$$p_*: \pi_1(E,(0,0)) \to \pi_1(B,(0,0))$$

为单同态(据定理 5.2.6).

令 ζ 表示拓扑空间 E 中以(0,0)为基点，沿着图形中箭头方向所表示的一条闭路，而令 α 与 β 表示拓扑空间 B 中以(0,0)为基点，如图箭头方向所表示的两条闭路.

由于

$$\begin{aligned} p_*([\zeta]) &= [\alpha] \circ [\beta] \circ [\alpha]^{-1} \circ [\beta]^{-1} \\ &= [\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}], \end{aligned}$$

且$[\zeta]$不是群 $\pi_1(E,(0,0))$的单位元，以及 p_* 为单同态，所以 $[\alpha]\circ[\beta]\circ[\alpha]^{-1}\circ[\beta]^{-1}$不是群 $\pi_1(B,(0,0))$中的单位元，此表明 8 字空间 $B=S_1^1 \vee S_2^1$ 的基本群 $\pi_1(B,(0,0))$，不是 Abel 群.

例 2 双环面 T_2 的基本群不是 Abel 群.

因为 8 字空间 $S^1 \vee S^1$ 是双环面 T_2 的收缩核(如图 5.4.2 所示)，

$$r: (T_2, x_0) \to (S^1 \vee S^1, x_0)$$

为收缩映射，

$$i: (S^1 \vee S^1, x_0) \to (T_2, x_0)$$

为含入映射，则

$$ri: (S^1 \vee S^1, x_0) \to (S^1 \vee S^1, x_0)$$

诱导出的同态

$$(ri)_* = r_* i_* = I_{\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)}: \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \to \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$$

为恒等同构，从而得

$$i_*: \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \to \pi_1(T_2, x_0)$$

是单同态. 由前例可知，双环面 T_2 的基本群 $\pi_1(T_2, x_0)$是非 Abel 的.

5.4.5 定理 闭曲面中的 2 维球面 S^2，环面 T^2，射影平面 P^2

与双环面 T_2 是互不同胚的.

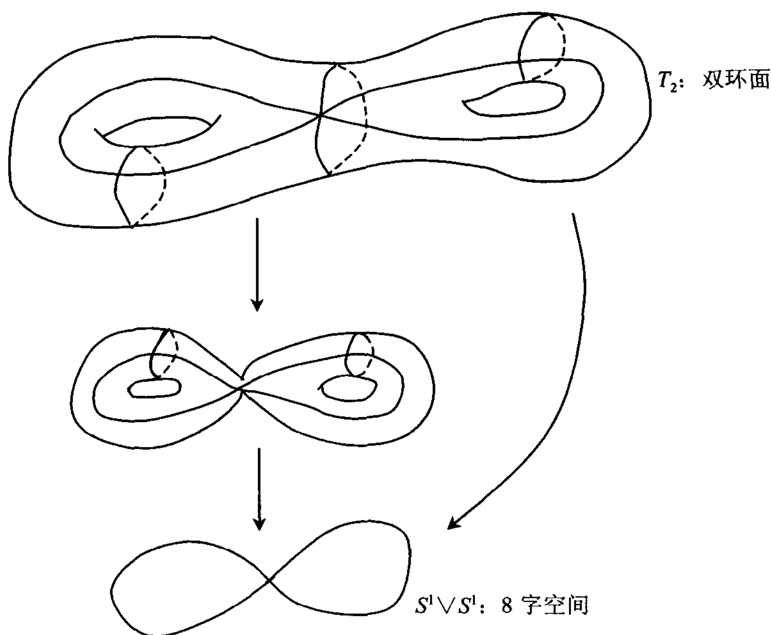


图 5.4.2 8 字空间是双环面的收缩核

习　　题

1. 是否∃拓扑空间 Y,使得 $S^1 \times Y \cong P^2$ 或 S^2?

2. 证明:任一有限生成的 Abel 群均是某一拓扑空间的基本群.

3. 求 Klein 瓶的基本群.

4. 求圆柱面的基本群.

5*. 利用闭曲面的拓扑分类定理,求所有闭曲面的基本群.

6*. 求所有带边曲面的基本群.

5.5 覆盖空间的分类

5.5.1 定义 设 $p: E \to B, p': E' \to B$ 都是覆盖映射,若存在同胚映射

$$h: E' \to E,$$

使得

$$ph = p'.$$

则称覆盖映射 $p: E \to B$ 与 $p': E' \to B$ 是**等价**的,或称同一底空间 B 上的复盖空间(E,p)与(E',p')是**等价**的.

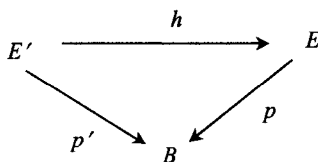


图 5.5.1

5.5.2 定理 设 $p: E \to B$ 是覆盖映射,且 E 与 B 都是道路连通拓扑空间.若 $b_0 \in B$,则$\{p_* \pi_1(E,e); e \in p^{-1}(b_0)\}$组成群 $\pi_1(B,b_0)$ 的子群的一个共轭类.

证明 任取 $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$,据题设可令

$$\tilde{\omega}: I \to E$$

是 E 中一条道路,使得 $\tilde{\omega}(0)=e_0, \tilde{\omega}(1)=e_1$,则 $\tilde{\omega}$ 决定一个群同构

$$\tilde{\omega}_{\#}: \pi_1(E,e_0) \to \pi_1(E,e_1).$$

令

$$\omega := p\tilde{\omega},$$

则

$$\omega: I \to B$$

是 B 中以 $b_0=\omega(0)=\omega(1)$ 为基点的一条闭路，所以 $[\omega]\in\pi_1(B,b_0)$.

因为

$$
\begin{aligned}
& p_*\pi_1(E,e_1) \\
&\quad = p_*\tilde{\omega}_\#\pi_1(E,e_0) \\
&\quad = p_*(\overline{[\tilde{\omega}]}\pi_1(E,e_0)[\tilde{\omega}]) \\
&\quad = \overline{[p\tilde{\omega}]}p_*\pi_1(E,e_0)[p\tilde{\omega}] \\
&\quad = \overline{[\omega]}p_*\pi_1(E,e_0)[\omega],
\end{aligned}
$$

其中 $[\omega]\in\pi_1(B,b_0)$，$\overline{[\omega]}$ 是 $[\omega]$ 的逆元，所以

$$p_*\pi_1(E,e_0) \text{ 与 } p_*\pi_1(E,e_1)$$

是 $\pi_1(B,b_0)$ 的共轭子群.

设 $\pi_1(B,b_0)$ 的子群 H 共轭于子群 $p_*\pi_1(E,e_0)$，其中 $e_0\in p^{-1}(b_0)$，则存在 $[\theta]\in\pi_1(B,b_0)$，使得

$$H=\overline{[\theta]}p_*\pi_1(E,e_0)[\theta].$$

令 $\tilde{\theta}$ 是 θ 在 E 中的提升，且 $\tilde{\theta}(0)=e_0$，则

$$\tilde{\theta}(1)=e\in p^{-1}(b_0).$$

因为 $\pi_1(E,e)=\tilde{\theta}_\#\pi_1(E,e_0)$，所以

$$
\begin{aligned}
& p_*\pi_1(E,e) \\
&\quad = p_*\tilde{\theta}_\#\pi_1(E,e_0) \\
&\quad = p_*(\overline{[\tilde{\theta}]}\pi_1(E,e_0)[\tilde{\theta}]) \\
&\quad = (\overline{[p\tilde{\theta}]}p_*\pi_1(E,e_0)[p\tilde{\theta}] \\
&\quad = \overline{[\theta]}p_*\pi_1(E,e_0)[\theta] \\
&\quad = H,
\end{aligned}
$$

即 $$H\in\{p_*\pi_1(E,e);e\in p^{-1}(b_0)\}.$$

综合上述，可知若 $b_0\in B$，则

$$\{p_*\pi_1(E,e);e\in p^{-1}(b_0)\}$$

组成群 $\pi_1(B,b_0)$ 的子群的一个共轭类. ■

5.5.3 定理(映射提升定理) 设 $p: E\to B$ 是覆盖映射,$e_0\in E$,$p(e_0)=b_0$,又设 $f: Y\to B$ 为连续映射,其中 Y 是道路连通、局部道路连通的拓扑空间,且$f(y_0)=b_0$. 若 $f_*\pi_1(Y,y_0)\subset p_*\pi_1(E,e_0)$,则 f 有唯一的提升$\tilde{f}: Y\to E$,使得$\tilde{f}(y_0)=e_0$.

证明

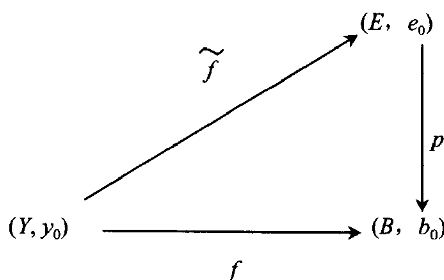


图 5.5.2

(1) 唯一性

若 f 另有提升 $\tilde{g}: Y\to E$,使得 $\tilde{g}(y_0)=e_0$,则任取 $y\in Y$,令 $\alpha: I\to Y$为 Y 中一条道路,使 $\alpha(0)=y_0$,$\alpha(1)=y$,从而可得$\tilde{f}\alpha$ 与 $\tilde{g}\alpha$ 都是道路 $f\alpha: I\to B$ 在 E 中的提升,且$\tilde{f}\alpha(0)=\tilde{g}\alpha(0)=e_0$,据道路提升的唯一性,得

$$\tilde{f}\alpha=\tilde{g}\alpha,$$

特别地$\tilde{f}(y)=\tilde{f}\alpha(1)=\tilde{g}\alpha(1)=\tilde{g}(y)$,即

$$\tilde{f}=\tilde{g}.$$

(2) 存在性

任取 $y\in Y$,令 $\alpha: I\to Y$ 为 Y 中一条道路,使得 $\alpha(0)=y_0$,$\alpha(1)=y$,则得道路

$$f\alpha: I\to B,$$

且 $f\alpha(0)=b_0$，从道路提升定理可知道路 $f\alpha$ 有唯一提升$\widetilde{f\alpha}: I\to E$，使得

$$(\widetilde{f\alpha})(0)=e_0.$$

令

$$\tilde{f}(y)=(\widetilde{f\alpha})(1),$$

记其为 $e\in E$. 则$\tilde{f}$的定义不依赖于 α 的选择. 事实上，若

$$\beta: I\to Y$$

是 Y 中另一道路，使得 $\beta(0)=y_0$，$\beta(1)=y$，则

$$\alpha*\bar{\beta}: I\to Y$$

是 Y 中以 y_0 为基点的一条闭路，所以

$$[\alpha*\bar{\beta}]\in\pi_1(Y,y_0).$$

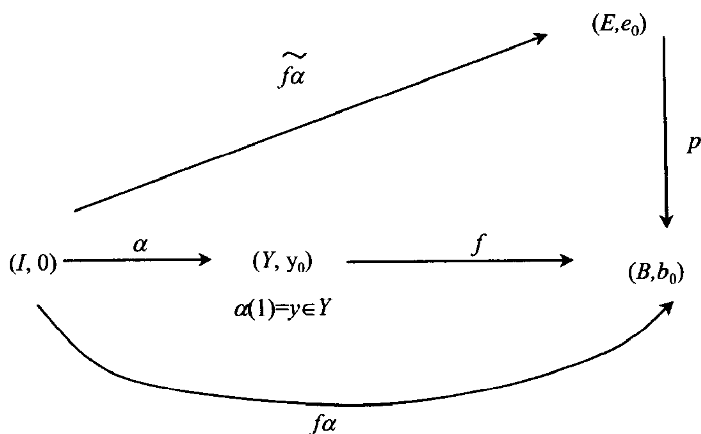


图 5.5.3

据题设 $f_*\pi_1(Y,y_0)\subset p_*\pi_1(E,e_0)$，于是对于$[\alpha*\bar{\beta}]\in\pi_1(Y,y_0)$，存在

$$[\tilde{\delta}]\in\pi_1(E,e_0)$$

使得

$$f_*([\alpha*\bar{\beta}])=p_*([\tilde{\delta}]),$$

即

$$[f\alpha * f\bar{\beta}] = [p\tilde{\delta}],$$

这表明 $f\alpha * f\bar{\beta}$ 与 $p\tilde{\delta}$ 是 B 中以 b_0 为基点的等价闭路，所以，$f\alpha * f\bar{\beta}$ 与 $p\tilde{\delta}$ 在 E 中以 e_0 为起点的道路提升

$$\widetilde{f\alpha * f\bar{\beta}} \text{ 与 } \tilde{\delta}.$$

应具有相同的终点，且是等价道路(定理 5.2.5)，但 $\tilde{\delta}$ 是 E 中以 e_0 为基点的闭路，从而$\widetilde{f\alpha * f\bar{\beta}}$为 E 中以 e_0 为基点的闭路. 由此可知，如果$\widetilde{f\alpha}$与$\widetilde{f\beta}$分别是 $f\alpha$ 与 $f\beta$ 在 E 中以 e_0 为起点的提升，则它们必有相同的终点，即

$$\widetilde{f\alpha}(1) = \widetilde{f\beta}(1).$$

这就证明了$\tilde{f}(y)$不依赖于道路 α 的选择，所以

$$\tilde{f}: Y \to E$$

是映射. 明显地

$$p\tilde{f} = f.$$

剩下要证明这样定义的映射$\tilde{f}: Y \to E$ 是连续的. 任取 $y_1 \in Y$，设 $\overline{N}$ 是$\tilde{f}(y_1)$在 E 中的邻域.(要证明：存在 y_1 在 Y 中的邻域 W，使得$\tilde{f}(W) \subset \overline{N}$). 取 $p\tilde{f}(y_1) = f(y_1)$在 B 中的一个典型邻域 V，用$\widetilde{V}$表示 $p^{-1}(V)$中含有$\tilde{f}(y_1)$的典型邻域. 不妨设$\widetilde{V} \subset \overline{N}$(否则取$V' = p(\overline{N} \cap \widetilde{V})$，则 $p^{-1}(V')$中必含有$\tilde{f}(y_1)$的典型邻域$\widetilde{V'} \subset \overline{N}$). 则

$$p|_{\widetilde{V}}: \widetilde{V} \to V$$

是同胚.

因为 $f: Y \to B$ 是连续的，所以可取 y_1 在 Y 中的一个邻域 W 是道路连通的(据 Y 是局部道路连通的)，且使得 $f(W) \subset V$.

现在只要证明$\tilde{f}(W) \subset \widetilde{V}(\subset N)$. 任取 $y \in W$，取一条道路：

$$\beta: I \to Y$$

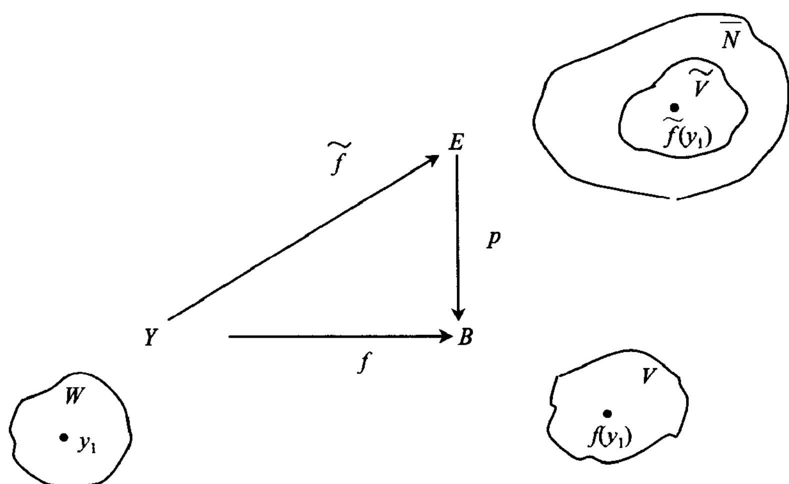


图 5.5.4

使得 $\beta(0)=y_1,\beta(1)=y$，且 $\beta(I)\subset W\subset Y$.

令

$$\widetilde{f\beta}=(p|_{\widetilde{V}})^{-1}(f\beta),$$

则$\widetilde{f\beta}$是 B 中道路 $f\beta$ 在 E 中的提升，起点为$\widetilde{f\beta}(0)=(p|_{\widetilde{V}})^{-1}(f\beta)(0)=(p|_{\widetilde{V}})^{-1}f(y_1)=\widetilde{f}(y_1)\in\widetilde{V}$，且$\widetilde{f\beta}(I)=(p|_{\widetilde{V}})^{-1}(f\beta)(I)\subset(p|_{\widetilde{V}})^{-1}f(W)\subset(p|_{\widetilde{V}})^{-1}(V)\subset\widetilde{V}$.

设 $\alpha: I\to Y$ 为 Y 中道路，使得

$$\alpha(0)=y_0,\alpha(1)=y_1.$$

则 B 中以 $b_0=f\alpha(0)$为始点的道路 $f\alpha: I\to B$ 在 E 中以 e_0 为始点的提升，记作$\widetilde{f\alpha}$，据$\widetilde{f}$的定义可得

$$\widetilde{f}(y_1)=\widetilde{f\alpha}(1),$$

即道路$\widetilde{f\alpha}$的终点为$\widetilde{f}(y_1)$.

所以由上述可知：$\widetilde{f\alpha}*\widetilde{f\beta}$是有定义的，它是 E 中以 e_0 为始点的一条道路，且是道路 $f(\alpha*\beta)$的提升，但 $\alpha*\beta$ 是 Y 中以 y_0 为始

点，y 为终点的一条道路. 于是由$\tilde{f}$的定义得

$$\begin{aligned}\tilde{f}(y) &= \widetilde{f(\alpha*\beta)}(1)\\ &= (\widetilde{f\alpha} * \widetilde{f\beta})(1)\\ &= \widetilde{f\beta}(1) \in \tilde{V} \subset \overline{N}.\end{aligned}$$

因为 $y \in W$ 是任取的，所以得$\tilde{f}(W) \subset \tilde{V} \subset \overline{N}$，即$\tilde{f}: Y \to E$ 是连续的. ■

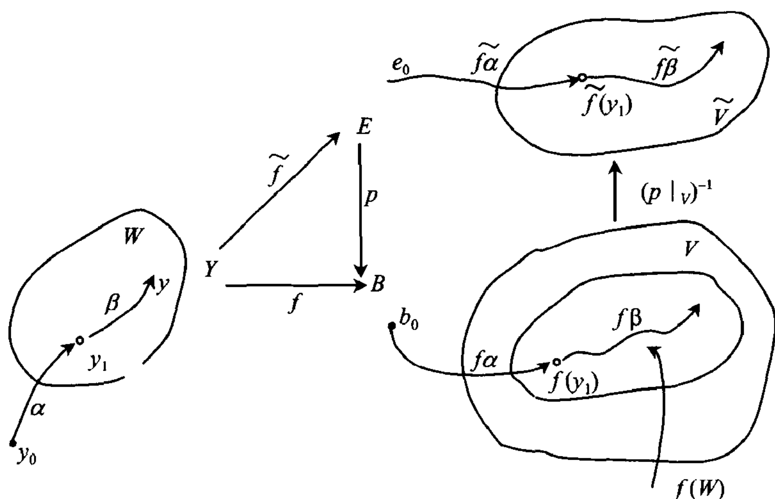


图 5.5.5

5.5.4 定理 设 $p: E \to B$，$p': E' \to B$ 均为覆盖映射，其中 B、E 与 E' 都是道路连通、局部道路连通的拓扑空间，又设 $p(e_0) = p'(e'_0) = b_0$. 则 p 与 p'是等价的覆盖映射，当且仅当 $p_* \pi_1(E, e_0)$ 与 $p'_* \pi_1(E', e'_0)$是 $\pi_1(B, b_0)$的共轭子群.

证明 必要性

设 $p: E \to B$，$p': E' \to B$ 是等价的覆盖映射，所以存在同胚

$$h: E' \to E$$

使得 $ph = p'$，记 $h(e'_0) = e_1 \in E$，因 $h:(E',e'_0) \to (E,e_1)$ 是同胚，

所以 h 诱导出的同态

$$h_*: \pi_1(E',e'_0) \to \pi_1(E,e_1)$$

是群同构，即

$$h_*(\pi_1(E',e'_0)) = \pi_1(E,e_1).$$

$E' \xrightarrow{h} E$，$p': E' \to B$，$p: E \to B$

图 5.5.6

从而得

$$p_* h_* \pi_1(E',e'_0) = p_* \pi_1(E,e_1).$$

由于 $p(e_1)=p'h^{-1}(e_1)=p'(e'_0)=b_0$，即得 $e_1, e_0 \in p^{-1}(b_0)$，所以，从定理 5.5.1 得 $p_*\pi_1(E,e_1)$ 与 $p_*\pi_1(E,e_0)$ 是 $\pi_1(B,b_0)$ 的共轭子群，从而得 $p'_*\pi_1(E',e'_0)$ 与 $p_*\pi_1(E,e_0)$ 是 $\pi_1(B,b_0)$ 的共轭子群.

充分性

设 $\pi_1(B,b_0)$ 的两个子群 $p_*\pi_1(E,e_0)$ 与 $p'_*\pi_1(E',e'_0)$ 是共轭的.

考虑图 5.5.7

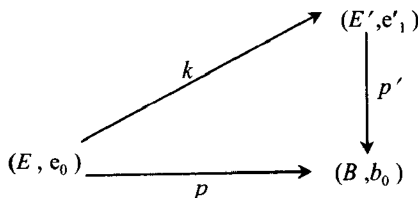


图 5.5.7

其中 $p': E' \to B$ 是覆盖映射，E 是道路连通、局部道路连通的拓扑空间，由定理 5.5.2，存在 $e'_1 \in p^{-1}(b_0)$，使 $p_*\pi_1(E,e_0) = p'_*\pi_1(E',e'_1)$.

据定理 5.5.3 可得 p 的唯一提升，记作 k，使得 $k(e_0)=e'_1$，且 $p'k=p$.

考虑图 5.5.8，则同样可得 p' 的唯一提升，记作 h 使得

$h(e'_1)=e_0$，且 $ph=p'$.

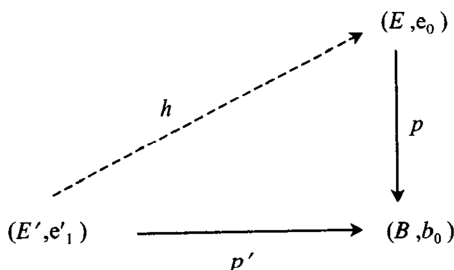


图 5.5.8

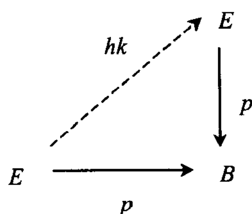


图 5.5.9

因为 $p(hk)=p'k=p$，则

$$hk: E \to E$$

是 $p: E \to B$ 的一个提升，且满足

$$hk(e_0) = e_0.$$

但是，恒等映射

$$I_E: E \to E$$

是 $p: E \to B$ 的另一个提升，且 $I_E(e_0)=e_0$，所以得到

$$hk = I_E.$$

同样可证 $kh=I_{E'}: E' \to E'$.

综合上述，则得

$$h: E' \to E$$

是同胚映射，且 $ph=p'$，即

$$p: E \to B$$

与

$$p' : E' \to B$$

是等价的覆盖映射. ■

习　题

1. 设 $n \geqslant 2$,则 S^n 到 S^1 的映射类只有一个.

2. 证明:S^2 到 T^2 的任何连续映射都是零伦的.

3. P^2 到 T^2 的映射类有几个? 为什么?

4. 描述环面,射影平面,Klein 瓶,Möbius 带以及圆柱面的所有覆盖空间.

5. 设 $p: E \to B$ 是覆盖映射,且知 $p^{-1}(x_0)$ 是有限的,若 $\pi_1(B)=Z$,求 $\pi_1(E)$.

6. 设 $p: E \to B$ 是覆盖映射,求证 p 是同胚 $\Leftrightarrow p_* \pi_1(E)=\pi_1(B)$.

(注:5、6 两题均假设 E 是道路连通的)

第6章　奇异同调论

拓扑学的基本任务是去确定二拓扑空间是否同胚，而解决该问题的有效途径，是去寻找更多的拓扑不变量．第二章关于可剖分的拓扑空间的单纯同调群，正是这种空间的一个典型的拓扑不变量．那么一个自然的问题是：对于一般的拓扑空间（未必可剖分），我们是否亦可建立类似的拓扑不变量，从而为解决一般拓扑空间的同胚与否问题，提供一个有力的工具呢？本章正是围绕该问题展开研究的．由于需兼顾到不同研究方向读者的学习和应用，我们在这里仅限于介绍奇异同调论的一些基本知识，有在代数拓扑领域想深入探究者，可通过阅读本书书后所列的有关参考文献（如[1]和[2]等），去进一步丰富奇异同调论的知识．

本章我们首先针对一般拓扑空间，去构造其奇异同调群，并证明其拓扑不变性；然后将给出奇异同调群计算的一些主要工具和基本方法，并具体计算一些空间的同调群；在此基础上，我们去探讨奇异同调群的若干应用；最后我们对相对奇异同调论和带系数群的同调群作一简要介绍．

6.0　预备知识：范畴与函子

众所周知，代数拓扑即用代数的方法去解决拓扑问题．为此，我们在前面曾就每一可剖分空间，对应地给出其各维同调群．但为了比较不同拓扑空间的性质，我们仅将空间实体与代数实体联系是不够的，还需把联系空间间的映射与其对应的代数系统（同调群）间的同态结合起来考虑，才能在更深、更有效的层次上完成从几何问题向代数问题的过渡．上述对应可概括为：可剖空间及其

单纯映射$\rightsquigarrow$链复形及其链映射$\rightsquigarrow$同调群及其同态. 那么一个自然的问题是能否将这种不同实体及实体间的联系,给出一种统一的处理方法呢? 20 世纪中叶 Eilenberg 和 Maclane 提出的范畴论,很好地解决了这一问题.

6.0.1 定义 一个范畴 $\mathscr{C}$ 由以下要素构成:

(a) 一类数学对象,记这些对象的全体为 $ob\mathscr{C}$;

(b) 对每二 $X,Y\in ob\mathscr{C}$,给定一个集 $Mor_{\mathscr{C}}(X,Y)$,其元素称为从 X 到 Y 的射,且将 $f\in Mor_{\mathscr{C}}(X,Y)$ 常记作 $f: X\to Y$;

(c) 一个复合规则:$Mor_{\mathscr{C}}(X,Y)\times Mor_{\mathscr{C}}(Y,Z)\to Mor_{\mathscr{C}}(X,Z)$ 记为$(f,g)\to g\circ f$,满足以下公理:

结合律:对 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\xrightarrow{h}W$,有 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

单位律:对 $\forall X\in ob\mathscr{C}$, $\exists I_X\in Mor_{\mathscr{C}}(X,X)$,使

$$I_X\circ f=f,\ \forall f\in Mor_{\mathscr{C}}(Y,X),$$

$$g\circ I_X=g,\ \forall g\in Mor_{\mathscr{C}}(X,Z).$$

例 1 (1) 集合及其映射的范畴;

(2) 拓扑空间及其连续映射的范畴;

(3) 群及其同态的范畴;

(4) Abel 群及其同构的范畴.

注 1) 在每一范畴 $\mathscr{C}$ 中,对应于每一对象 X 的单位元 I_X 是唯一的;

2) 若二范畴 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 满足:

(a) $ob\mathscr{C}\subset ob\mathscr{D}$;

(b) $Mor_{\mathscr{C}}(X,Y)\subset Mor_{\mathscr{D}}(X,Y)$,对 $\forall X,Y\in ob\mathscr{C}$;

(c) $\mathscr{C}$ 中射的复合是 $\mathscr{D}$ 中射的复合的限制.

则称 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{D}$ 的一个**子范畴**.

例 2 (1) 上例中(4)是(3)的子范畴,(2)、(3)、(4)均是(1)的子范畴;

(2) 带基点的拓扑空间及保基点的连续映射是上例中(2)的子范畴.

思考 请再举几个范畴与子范畴的例子.

6.0.2 定义 设 $\mathscr{C}$ 为一范畴,若其中射 $f\in Mor_{\mathscr{C}}(X,Y)$,满足:对 $\forall g_1,g_2\in Mor_{\mathscr{C}}(Y,Z)$,$g_1\circ f=g_2\circ f\Rightarrow g_1=g_2$,则称 f 为**满的**;若其中射 $f\in Mor_{\mathscr{C}}(X,Y)$ 满足:对 $\forall h_1,h_2\in Mor_{\mathscr{C}}(W,X)$,$f\circ h_1=f\circ h_2\Rightarrow h_1=h_2$,则称 f 为**单的**.

6.0.3 定义 对范畴中的射 $f\in Mor_{\mathscr{C}}(X,Y)$,若 $\exists f'\in Mor_{\mathscr{C}}(Y,X)$,使 $f'\circ f=I_X$,$f\circ f'=I_Y$,则称 f 为一**同构**. 注意,既单又满未必是同构.

我们已经看到,实际问题中存在很多不同的范畴,那么这些范畴间,当然也应当有联系,而联系它们的桥梁正是函子.

6.0.4 定义 设 $\mathscr{C}$、$\mathscr{D}$ 是二范畴,一个**协变(反变)函子** $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 是一个对应:

(a) 对 $\mathscr{C}$ 的每个对象 X,有 $\mathscr{D}$ 的一个对象 $F(X)$ 与之对应;

(b) 对 $\mathscr{C}$ 的每个射 $f:X\to Y$,有 $\mathscr{D}$ 的一个射 $F(f):F(X)\to F(Y)$ $(F(f):F(Y)\to F(X))$ 与之对应且满足:

单位律:$F(I_X)=I_{F(X)}$;

复合律:$F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$ $\quad(F(g\circ f)=F(f)\circ F(g))$.

例 3 $\mathscr{C}$=带基点空间及其保基点映射范畴;

$\mathscr{D}$=群及其同态范畴.

令 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$,$F((X,x_0))=\pi_1(X,x_0)$,

$$F(f:(X,x_0)\to(Y,y_0))=f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0),$$

则 F 是 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的一个协变函子.

注 同理可验证:若 $\mathscr{C}$=可剖空间及其单纯映射范畴,$\mathscr{D}$=

Abel群及其同态范畴，则对应 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$，$F(X) - H_*(X)$（$X$ 的同调群），$F(f: X \to Y) \to F(f) = f_*: H_*(X) \to H_*(Y)$ 也是一协变函子.

例 4 令 $\mathscr{C}$ = 域 K 上的 n 维线性空间及其线性变换范畴，而令 $\mathscr{D} = \mathscr{C}$，对应 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 定义为 $F(V) = V^*$（V 的对偶空间），$F(\sigma: V \to W) = F(\sigma) = \sigma^*: W^* \to V^*$（$\sigma$ 的对偶变换），则 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 便是反变函子.

习　题

1. 对拓扑空间 X, Y，记 $[X, Y]$ 为从 X 到 Y 映射的同伦类的集合.

(1) 设 X_0 是一取定的拓扑空间，令对应 F：

$$X \overset{F}{\rightsquigarrow} [X_0, X],$$

$X \xrightarrow{f} Y \overset{F}{\rightsquigarrow} [\varphi] \xrightarrow{F(f)} [f \circ \varphi]$，试证 F 是一协变函子.

(2) 设 X_0 是取定的拓扑空间，令对应 F：

$$X \overset{F}{\rightsquigarrow} [X, X_0],$$

$X \xrightarrow{f} Y \overset{F}{\rightsquigarrow} [\varphi] \xrightarrow{F(f)} [\varphi \circ f]$，试证 F 为一反变函子.

2. 自己举几个范畴和函子的例子.

6.1　链复形・链映射・链同伦

在构造一般拓扑空间的奇异同调群的过程中，我们所用到的其实仅仅是一种特殊的范畴：链复形及其链映射范畴.

6.1.1 定义　链复形 C 由带整数指标的分次 Abel 群 $\{C_n\}$ 及其 -1 阶的边缘同态 $\{\partial_n\}$ 构成，记作 $C - \{C_n, \partial_n\}$：

$$\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \quad n \in Z,$$

适合条件$\partial^2=0$.

6.1.2 定义 设 $C=\{C_n,\partial_n\}$,$C'=\{C'_n,\partial'_n\}$为二链复形,则**链映射**是指从 C 到C'的 0 阶同态 $f: C\to C'$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \to & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \to \cdots \\ & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & & \\ \cdots \to & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \to \cdots \end{array}$$

满足 $f_n\partial_{n+1}=\partial'_{n+1}f_{n+1}$,对$\forall n\in Z$,记作 $f=\{f_n\}$.

注 对 $f=\{f_n\}$,$g=\{g_n\}$,若记 $f\circ g=\{f_ng_n\}$,则易见链复形及其链映射是一个范畴.

对链复形 $C=\{C_n,\partial_n\}$,记 $Z_n(C):=\mathrm{Ker}\,\partial_n$,$B_n(C):=\mathrm{Im}\partial_{n+1}$,由$\partial^2=0\Rightarrow B_n(C)\subset Z_n(C)$,从而我们可定义

$$H_n(C):=Z_n(C)/B_n(C),$$

并称之为链复形 C 的第 n 个**同调群**,而 $Z_n(C)$和 $B_n(C)$分别称为 C 的第 n 个**闭链群**和**边缘链群**.

注 若记 $\mathscr{C}$是链复形及其链映射范畴,而记 $\mathscr{D}$ 为 Abel 群及其同态范畴,则 $\exists\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的协变函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 使 $F(C)=H_*(C)$,$F(C_1\xrightarrow{f}C_2)=F(f)=f_*:H_*(C_1)\to H_*(C_2)$.

6.1.3 定义 设 $f,g:C\to C'$是二链映射,我们说 f 与 g 是**链同伦的**,记作 $f\simeq g: C\to C'$,如果 $\exists 1$ 阶同态 $T=\{T_n:C_n\to C'_{n+1}\}$,使

$$g_n-f_n=\partial'_{n+1}T_n+T_{n-1}\partial_n$$

其中 T 称为连接 f 与 g 的一个**链同伦**.

6.1.4 定义 二链复形 C 与 C'称为**链等价**的,若$\exists$链映射

$$C \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} C'$$

使

$$\psi \circ \varphi \simeq I_C, \quad 且\ \varphi \circ \psi \simeq I_{C'}.$$

这里 φ 与 ψ 称为 C 与 C' 间的一对**链等价**.

由定义 6.1.3 和 6.1.4 不难直接证明如下推论：

6.1.5 推论 若 $f \simeq g: C \to C'$，则

$$f_* = g_*: H_*(C) \to H_*(C').$$

6.1.6 推论 若 $C \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} C'$ 是 C 与 C' 间的链等价，则

$$H_*(C) \underset{\psi_*}{\overset{\varphi_*}{\rightleftarrows}} H_*(C')$$

是其同调群间的一对同构.

习　题

1. 证明链同伦是一等价关系.
2. 证明链等价是链复形间的一等价关系.
3. 设 $f_1, f_2: C \to C'$ 及 $g_1, g_2: C' \to C''$ 均为链映射，且 $f_1 \simeq f_2, g_1 \simeq g_2$，求证 $g_1 f_1 \simeq g_2 f_2$.

6.2　奇异同调群

本节我们基本上仍按照单纯同调群的构造模式去构造奇异同调群，即由拓扑空间我们得到其奇异链复形，而把奇异链复形的同调群作为拓扑空间的同调群.

6.2.1 定义 设 X 为拓扑空间，X 的一个**奇异 $n(n \geq 0)$ 维单**

形是指一个连续映射

$$\sigma^n : \triangle^n \to X,$$

其中$\triangle^n$是标准n维单形(见定义1.1.6).

例1 设C为欧氏空间的一个凸集，$c_0, c_1, \cdots, c_n \in C$，则仿射映射$\sigma^n : \triangle^n \to C$，$\sigma^n(e_i) = c_i$，$i = 0, 1, \cdots, n$，是凸集$C$上的奇异$n$维单形.

注 奇异n维单形是指一连续映射，而非连续映射下的像，但奇异0维单形可等同视为空间X中一点；另外，奇异1维单形事实上是X中的一条道路.

记$S_n(X)$为由X的所有奇异n维单形生成的自由Abel群，即$S_n(X) := \{\sum k_i \sigma_i^n ; k_i \in Z$，且除有限个外，其余$k_i = 0\}$，其元素称为$X$的**奇异$n$维链**. 另外，当$n < 0$时，令$S_n(X) := 0$.

设σ^n是X的一奇异n维单形，对整数$i(0 \leqslant i \leqslant n)$定义$X$的奇异$(n-1)$维单形$\partial_i \sigma^n$为

$$\partial_i \sigma^n(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) = \sigma^n(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1}),$$

称$\partial_i \sigma^n$是σ^n的第i个**面**.

由于第i个面算子∂_i是从奇异n维单形集到奇异$(n-1)$维单形集的一个映射，从而∃唯一的同态扩张：

$$\partial_i : S_n(X) \to S_{n-1}(X),$$

即$\partial_i(\sum k_j \sigma_j^n) = \sum k_j \partial_i \sigma_j^n$，由此当$n > 0$时我们定义**边缘算子**$\partial$是同态

$$\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X),$$

其中$\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i$；而当$n \leqslant 0$时，定义$\partial = 0$.

6.2.2 命题 $\partial^2 = 0$.

证明 只需对奇异n维单形证明即可.

先证当$k < j$时，$\partial_k \partial_j = \partial_{j-1} \partial_k$.

事实上

$$\partial_{j-1}\partial_k\sigma(x_0,x_1,\cdots,x_{n-2})$$
$$=\partial_k\sigma(x_0,\cdots,x_{j-2},0,x_{j-1},\cdots,x_{n-2})$$
$$=\begin{cases}\sigma(x_0,\cdots,x_{j-2},0,0,x_{j-1},\cdots,x_{n-2}),k=j-1,\\ \sigma(x_0,\cdots,x_{k-1},0,x_k,\cdots,x_{j-2},0,x_{j-1},\cdots,x_{n-2}),k<j-1.\end{cases}$$
$$\partial_k\partial_j\sigma(x_0,\cdots,x_{n-2})$$
$$=\partial_j\sigma(x_0,\cdots,x_{k-1},0,x_k,\cdots,x_{n-2})$$
$$=\begin{cases}\sigma(x_0,\cdots,x_{k-1},0,0,x_k,\cdots,x_{n-2}),k=j-1,\\ \sigma(x_0,\cdots,x_{k-1},0,x_k,\cdots,x_{j-2},0,x_{j-1},\cdots,x_{n-2}),k<j-1.\end{cases}$$

所以当 $k<j$ 时，$\partial_k\partial_j=\partial_{j-1}\partial_k$.

$$\begin{aligned}\partial^2\sigma&=\partial(\partial\sigma)=\partial\Big(\sum_i(-1)^i\partial_i\sigma\Big)\\ &=\sum_i(-1)^i\partial(\partial_i\sigma)=\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\sigma\\ &=\sum_{i>j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\sigma+\sum_{i\leqslant j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\sigma\\ &=\sum_{i>j}(-1)^{i+j}\partial_{i-1}\partial_j\sigma+\sum_{i\leqslant j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\sigma\\ &=\sum_{i-1\geqslant j}(-1)^{i+j}\partial_{i-1}\partial_j\sigma+\sum_{i\leqslant j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\sigma\\ &=\sum_{i\leqslant j}(-1)^{i+j+1}\partial_j\partial_i\sigma+\sum_{i\leqslant j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\sigma\\ &=0\end{aligned}$$

■

6.2.3 定义 称 $S(X):=\{S_n(X),\partial_n\}$ 为拓扑空间 X 的**奇异链复形**；而 $Z_n(X):=\mathrm{Ker}\partial_n$，$B_n(X):=\mathrm{Im}\partial_{n+1}$ 分别称为 X 的 n **维奇异闭链群**和 n **维奇异边缘链群**，它们的元素分别称为 X 的 n **维闭链**和 n **维边缘链**.

由命题 6.2.2 知 $Z_n(X)=\mathrm{Ker}\partial_n\supset\mathrm{Im}\partial_{n+1}=B_n(X)$，所以我们有：

6.2.4 定义 称商群

$$H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X) = \mathrm{Ker}\partial_n/\mathrm{Im}\partial_{n+1}$$

为拓扑空间 X 的 n 维**奇异同调群**，其元素称为 X 的 n 维**奇异同调类**. 同一同调类中的元素称为**相互同调**的.

注 对于可剖分空间，我们既有单纯同调群，又有奇异同调群，一个自然的问题是，这二者有何关系？答案是：二者一致. 但限于篇幅，我们在这里不作详细讨论，有兴趣者，可参见文献[2].

为今后应用方便，我们还引入如下的增广奇异链复形和简约奇异同调的概念：

6.2.5 定义 称 $\widetilde{S}(X) := \{\widetilde{S}_n(X), \widetilde{\partial}\}$ 为拓扑空间 X 的**增广奇异链复形**，其中

$$\widetilde{S}_n(X) = \begin{cases} S_n(X), & n \neq -1, \\ Z, & n = -1; \end{cases}$$

而

$$\widetilde{\partial}_n = \begin{cases} \partial_n, n \neq 0, \\ 0 \text{ 维链之系数和}, n = 0. \end{cases}$$

而称 $\widetilde{S}(X)$ 的同调群为空间 X 的**简约同调群**，记作 $\widetilde{H}_*(X)$.

注 拓扑空间 X 的同调群与简约同调群的关系是

$$H_n(X) = \begin{cases} \widetilde{H}_n(X), & n > 0; \\ \widetilde{H}_0(X) \oplus Z, & n = 0. \end{cases}$$

例 2 用 pt 表示单点空间，求其同调群.

对任意 $n \geqslant 0$，该空间仅有一个奇异 n 维单形，故其 n 维链群

$$S_n(pt) = Z, \text{且 } Z_n(pt) = \begin{cases} 0, & n(>0) \text{为偶数}; \\ S_n(pt), & n(>0) \text{为奇数}. \end{cases}$$

而 $B_n(pt) - Z_n(pt) \quad (n>0)$，所以

$$H_n(pt) = \begin{cases} 0, & n > 0; \\ Z, & n = 0. \end{cases}$$

例 3 设 X 是道路连通空间，则 $H_0(X) = Z$.

事实上，取定 X 中的 0 维单形 x_0，则其显然是 X 的 0 维闭链.

另外，因 X 道路连通，所以 x_0 与 X 中的任一 0 维单形（闭链）同调，从而 X 中任一 0 维闭链 $\sum k_i\sigma_i^0$ 同调于 $(\sum k_i)x_0$，即 ∃ 满同态

$$S_0(X) \xrightarrow{h} Z, \qquad h(\sum k_i\sigma_i^0) = \sum k_i,$$

且若 $h(\sum k_i\sigma_i^0) = \sum k_i = 0$，则

$$\sum k_i\sigma_i^0 = \sum k_i(\sigma_i^0 - x_0) = \partial_1(\sum k_i\sigma_i^1),$$

其中 σ_i^1 是 X 中从 x_0 到 σ_i^0 的道路. 所以

$$H_0(X) = S_0(X)/\mathrm{Im}\partial_1 = \frac{S_0(X)}{\mathrm{Ker}h} = Z.$$

例 4 设空间 X 的道路连通分支为 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$，则

$$H_n(X) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} H_n(X_\alpha)$$

事实上，若令 X 的奇异链复形为 $S(X)=\{S_n(X),\partial_n\}$，则

$$S_n(X) - \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} S_n(X_\alpha), \partial_n \mid S_n(X_\alpha) : S_n(X_\alpha) \to S_{n-1}(X_\alpha),$$

所以

$$Z_n(X) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} Z_n(X_\alpha),\ B_n(X) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} B_n(X_\alpha),$$

$$H_n(X) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} H_n(X_\alpha).$$

习　题

1. 设 X 为道路连通空间，证明 $\widetilde{H}_0(X)=0$.

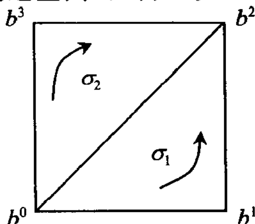


图 6.2.1

2. 设 a,b 是凸集 X 中两点，则 (a,b) 和 (b,a) 均是 X 中的 1 维单形，证明：$(a,b)\neq-(b,a)$，但 (a,b) 与 $-(b,a)$ 是同调的（即它们相差一边缘链）.

3. 设正方形 I^2 的四个顶点为 b^0,b^1,b^2,b^3（如图 6.2.1），而 $\sigma_1=(b^0,b^1,b^2)$，$\sigma_2=(b^0,b^3,b^2)$ 是 I^2 的二仿射 2 维奇异单形，求 $\partial(\sigma_1+\sigma_2)$ 和 $\partial(\sigma_1-\sigma_2)$.

4. 设 $p: I^2\to T$，$q: I^2\to K$ 为正方形到环面 T 与 Klein 瓶 K 的商映射，今有 T 与 K 上的 2 维奇异单形

$$\sigma_1=p(b^0,b^3,b^2),\ \sigma_2=p(b^0,b^1,b^2),$$
$$\tau_1=q(c^0,c^3,c^2),\ \tau_2=q(c^0,c^2,c^1),$$
$$\omega=q(c^0,c^3)=q(c^2,c^1).$$

求证：$\partial(\sigma_2-\sigma_1)=0$，$\partial(\tau_1+\tau_2)=2\omega$，$\partial\omega=0$.

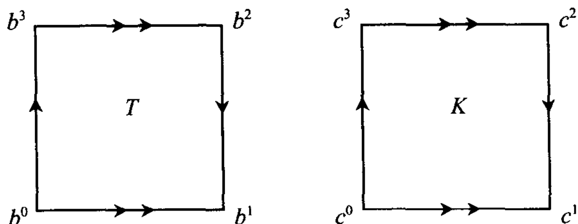


图 6.2.2

5. 若拓扑空间 X 为：

(a) 有限集带有通常拓扑；

(b) 离散可数空间.

试确定同调群 $H_n(X)$ $(n\geqslant0)$.

6.3 奇异同调群的同伦不变性

设 $f: X\to Y$ 为拓扑空间 X 到 Y 的连续映射，则对 X 中的任一 n 维奇异单形 $\sigma^n:\triangle^n\to X$，$f\sigma^n:\triangle^n\to Y$ 便是 Y 中的 n 维奇异

单形. 若令 $f_\#(\sigma^n)=f\sigma^n$，则 $f_\#$ 是从 X 的 n 维单形集到 Y 的 n 维单形集中的映射，再作线性扩张，便有同态

$$f_\# : S_n(X) \to S_n(Y).$$

易证 $f_\#$ 是从 X 的奇异链复形 $S(X)$ 到 Y 的奇异链复形 $S(Y)$ 的链映射，且 $(fg)_\# = f_\# g_\#$，再由 6.1 节的注，f 诱导了同态 $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$，且 $(fg)_* = f_* g_*$，现在试问，若 $f \simeq g : X \to Y$，f_* 与 g_* 的关系如何？关于此问题，我们有如下结论：

6.3.1 定理 设 $f \simeq g : X \to Y$，则

$$f_* = g_* : H_n(X) = H_n(Y), n \geqslant 0.$$

证明 设 f 与 g 间的同伦为 $F : X \times I \to Y$，即 $f(x)=F(x,0)$，$g(x)=F(x,1)$，$\forall x \in X$.

记 $\quad l_0 : X \to X \times I, \quad l_0(x)=(x,0)$；

$\quad\quad l_1 : X \to X \times I, \quad l_1(x)=(x,1)$.

则

$$f=Fl_0, g=Fl_1,$$

所以

$$f_\# = F_\# l_{0\#}, g_\# = F_\# l_{1\#}.$$

为证 $f_* = g_*$，只需证 $f_\# \simeq g_\#$，也只需证 $l_{0\#} \simeq l_{1\#}$. 如图 6.3.1

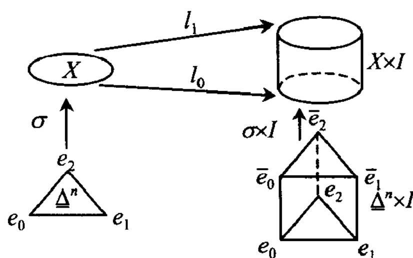


图 6.3.1

所示，

$$l_{0\#}(\sigma^n)(\langle e_0, e_1, \cdots, e_n \rangle) = (\sigma^n \times I)_\#(\langle e_0, e_1, \cdots, e_n \rangle),$$

而

$$l_{1\#}(\sigma^n)(\langle e_0, e_1, \cdots, e_n\rangle) = (\sigma^n \times I)_\#(\langle e_0, \bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n\rangle).$$

定义 $p_n: S_n(X) \to S_{n+1}(X \times I)$ 为

$$p_n(\sigma^n) = (\sigma^n \times I)_\# \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle e_0, \cdots, e_i, \bar{e}_i, \cdots, \bar{e}_n\rangle$$

则可以证明(留给读者)

$$\begin{aligned}(\partial_{n+1} p_n + p_{n-1}\partial_n)(\sigma^n) &= (\sigma^n \times I)_\#(\langle \bar{e}_0, \cdots, \bar{e}_n\rangle - \langle e_0, \cdots, e_n\rangle) \\ &= l_{1\#}(\sigma^n) - l_{0\#}(\sigma^n),\end{aligned}$$

即 $$\partial_{n+1} p_n + p_{n-1}\partial_n = l_{1\#} - l_{0\#},$$

所以 $l_{0\#} \simeq l_{1\#}$. ■

6.3.2 推论 若 $f: X \to Y$ 是一同伦等价,则 $H_n(X) \cong H_n(Y)$, $\widetilde{H}_n(X) \cong \widetilde{H}(Y)$, $n \geqslant 0$.

6.3.3 推论 若 $i: A \to X$ 是 X 的收缩核 A 到 X 中的含入,则 $i_*: H_n(A) \to H_n(X)$ $(n \geqslant 0)$是到 $H_n(X)$的直加项上的一单射;若 A 是 X 的一形变收缩核,则 $H_n(A) \cong H_n(X)$.

事实上,推论 6.3.2 及推论 6.3.3 的第二部分是明显的,以下只证推论 6.3.3 的第一部分:

记 $H_n(X)$的子群 $G_1 = \mathrm{Im}\, i_*$;另外,若设收缩 $g: X \to A$,则记 $G_2 = \mathrm{Ker}\, g_*$. 因在 $H_n(A)$上

$$g_* i_* = (gi)_* = (I_A)_* = I_{H_n(A)}.$$

所以 i_* 是单的.

注意到若 $\alpha \in G_1 \cap G_2$,则 $\exists \beta \in H_n(A)$,使 $i_*(\beta) = \alpha$,且 $g_*(\alpha) = 0$. 所以

$$0 = g_*(\alpha) = g_* i_*(\beta) = \beta \Rightarrow \alpha = 0.$$

另一方面,对 $\forall \gamma \in H_n(X)$,

$$\gamma = i_* g_*(\gamma) + (\gamma - i_* g_*(\gamma)),$$

即 γ 表示成了 G_1 中一元素与 G_2 中一元素的和,所以

$$H_n(X) = G_1 \oplus G_2.$$

在本节的最后，我们想明确 1 维同调群与基本群之间的关系，它对我们理解 1 维同调群的几何意义及计算 1 维同调群都有重要意义.

6.3.4 定理 设 X 为道路连通的拓扑空间，$x_0\in X$ 为基点，则∃满同态

$$\theta:\pi_1(X,x_0)\to H_1(X),$$

使 $\mathrm{Ker}\theta$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的换位子群. 因此，$H_1(X)$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的 Abel化.

证明 记标准单形$\triangle^1$ 与单位区间 I 的线性同构为 ω，则对 $\forall[\sigma]\in\pi_1(X,x_0)$：

(1) 建立映射

$$h:\pi_1(X,x_0)\to H_1(X),\text{使}$$

$$h([\sigma])=[\sigma\,\omega]:=[u].$$

因为 $$\partial u=\sigma(1)-\sigma(0)=0,$$

所以 u 是 1 维闭链.

又若 $\sigma_1\underset{P}{\simeq}\sigma_2:(I,\partial I)\to(X,x_0)$，则 $\exists\sigma'_i: S^1\to X$，$i=1,2$，使 $\sigma_i\omega=\sigma'_i\Delta'_1$（$\Delta'_1$ 为代表 $H_1(S^1)=Z$ 的生成元的 1 维奇异单形）.

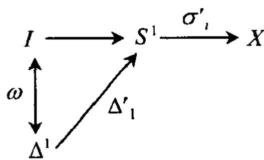


图 6.3.2

而由 $\sigma_1\underset{P}{\simeq}\sigma_2\Rightarrow\sigma'_1\simeq\sigma'_2: S^1\to X$. 所以由定理 6.3.1 有

$$(\sigma'_1)_*(\Delta'_1)=(\sigma'_2)_*(\Delta'_1),$$

即 $$[\sigma_1\omega]=[\sigma_2\omega].$$
所以上述 h 的定义是合理的.

(2) 证明 h 是一个同态. 如图 6.3.3,易证 Δ_2 上任一点 Q 可表为

(a) $Q=te_2+\frac{1}{2}(1-t)(1-s)(e_0+e_2)+(1-t)se_1$,或

(b) $Q=(1-t)e_0+\frac{1}{2}t(1-s)(e_0+e_2)+tse_1$.

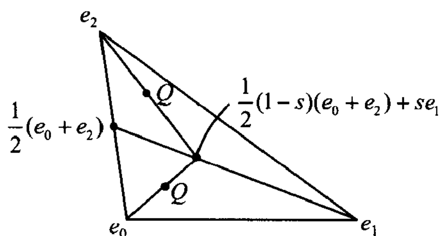


图 6.3.3

对 X 中以 x_0 为基点的任二闭道路 σ_1,σ_2,今定义 X 上一 2 维奇异单形 $\sigma^2:\triangle^2\to X$ 如下:对情形(a)中的 $Q,\sigma^2(Q)=\sigma_1(t)$;对情形(b)中的 $Q,\sigma^2(Q)=\sigma_2(t)$,则易证 $\partial\sigma^2=\sigma_2+\sigma_1-\sigma_2*\sigma_1$,从而 $h([\sigma_2*\sigma_1])=h([\sigma_2])+h([\sigma_1])$,即 h 为同态.

(3) 证明 h 满.

对 $\forall$ 闭链 $z=\sum k_i\sigma_i\in Z_1(X)$,则
$$0=\partial z=\sum k_i(\sigma_i(1)-\sigma_i(0)),$$
即合并同类项后,所有系数均为 0. 因 X 道路连通,我们可取从 x_0 到 $\sigma_i(0)$的一道路为 λ_{i0},从 x_0 到 $\sigma_1(1)$的道路为 λ_{i1}(注意,所取道路只依赖于端点,而不依赖于指标). 于是适当分散同类项后,有
$$\sum k_i(\lambda_{i1}-\lambda_{i0})=0.$$
令 $$\alpha_i:=\lambda_{i0}+\sigma_i-\lambda_{i1},$$

则　　$z=\sum k_i\alpha_i$，又 $\gamma_i=\lambda_{i0}*\sigma_i*\lambda_{i1}^{-1}$ 为闭路，所以

$$h\left(\prod \gamma_i^{k_i}\right)=[z],$$

即 h 满.

(4) 取 X 中以 x_0 为基点的闭路 $\gamma=\prod_i \sigma_i^{\varepsilon_i}$，其中 σ_i 为道路，而 $\varepsilon_i=\pm 1$. 记 $\exp(\sigma_i):=\sum_{\sigma_j=\sigma_i}\varepsilon_j$，今证$[\gamma]\in[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]\Leftrightarrow$ 对 γ 的所有不同因子道路 σ_i，$\exp(\sigma_i)=0$.

事实上"$\Rightarrow$"显然. 对"$\Leftarrow$"，取从 x_0 到 σ_i 的始点和终点的道路分别为 λ_{i0}，λ_{i1}，于是

$$\gamma=\prod_i \sigma_i^{\varepsilon_i}\underset{P}{\simeq}\prod(\lambda_{i0}\sigma_i\lambda_{i1}^{-1})^{\varepsilon_i}.$$

若$[\gamma]$在 $\pi_1(X,x_0)$的 Abel 化中的陪集为 $\tilde{\gamma}$，且记

$$\beta_i:=\lambda_{i0}\sigma_i\lambda_{i1}^{-1},$$

则 $\tilde{\gamma}=\sum\varepsilon_i\tilde{\beta}_i=\sum\exp(\alpha_i)\tilde{\beta}_i=0$，即

$$[\gamma]\in[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)].$$

(5) 证 $\mathrm{Ker}h=[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]$. 由于 $H_1(X)$ 为Abel的，所以$[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]\subset\mathrm{Ker}h$，反之，若 $h([\gamma])=0$，则$\exists$ 2 维奇异链 $\sum k_i\sigma_i$ 使 $\partial(\sum k_i\sigma_i)=\gamma\omega$，即

$$\gamma\omega=\sum k_i(\sigma_{i0}-\sigma_{i1}+\sigma_{i2}).\qquad (*)$$

因为 $\gamma\omega$ 与 σ_{ij} 均为 1 维奇异单形，所以上式经合并后，除 $\gamma\omega$ 的系数为 1，其余系数均为 0. 取 X 中从 x_0 到 $\sigma_{i2}(0)$，$\sigma_{i0}(0)$和 $\sigma_{i1}(1)$的道路分别为 λ_{i0}，λ_{i1} 和 λ_{i2}，令

$$\beta_{i0}:=\lambda_{i1}*\sigma_{i0}*\lambda_{i2}^{-1},$$
$$\beta_{i1}:=\lambda_{i0}*\sigma_{i1}*\lambda_{i2}^{-1},$$
$$\beta_{i2}:=\lambda_{i0}*\sigma_{i2}*\lambda_{i1}^{-1}.$$

于是

$$\beta_i:=\beta_{i0}*\beta_{i1}^{-1}*\beta_{i2}\underset{P}{\simeq}\lambda_{i1}*\sigma_{i0}*\sigma_{i1}^{-1}*\sigma_{i2}*\lambda_{i1}^{-1}\underset{P}{\simeq}x_0,$$

所以
$$\prod_i [\beta_i]^{k_i} = 1.$$
由上述关于对 $\gamma\omega$ 的表达式(*)的考察可知
$$\gamma(\prod_i \beta_i^{k_i})^{-1}$$
中各不同因子道路的指数和为 0,由(4)
$$[\gamma] \in [\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)].$$
综上,有
$$\pi_1(X,x_0)\Big/[\pi_1(X,x_0),\pi_2(X,x_0)]$$
$$= \pi_1(X,x_0)\Big/\mathrm{Ker}h \cong H_1(X).$$ ■

例 设 $K=$Klein 瓶,因为 $\pi_1(K,x_0)=\{a_1,a_2;a_1a_2a_1^{-1}a_2\}$,从而
$$H_1(K) = \pi_1(K,x_0)/[\pi_1,\pi_1] \cong Z \oplus Z_2.$$

习　题

1. 证明若 $f: X\to Y$ 同伦于常值映射,则 $f_*: H_*(X)\to H_*(Y)$ ($H_*(X)=\{H_n(X);n\in Z\}$)是零同态,并进而推出:若 X 可缩,则 X 是零调的(Acyclic):对 $\forall n\in Z, H_n(X)=0$.

2. 求证 $\widetilde{H}_*(X)$是一协变函子.

3. 设 $i: X\to X\times Y, i(x)=(x,y_0)$,

求证 $i_* H_n(X)\to H_n(X\times Y), n\in Z$ 为单同态.

4. 证明定理 6.3.4 中的同态 $h: \pi_1(X,x_0)\to H_1(X)$满足

(1) 若 $f: (X,x_0)\to(Y,y_0)$,则 $f_*h=hf_*$;

(2) 若 $u: I\to X$ 是从 x_0 到 x_1 的道路,则 $hu_*=h$,即图

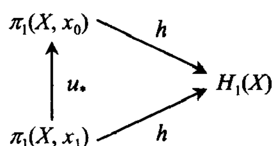


图 6.3.4

可换.

5. 求下列空间的 0 维和 1 维简约奇异同调群:

(1) 球面 S^n;

(2) Möbius 带;

(3) 射影平面 P^2.

6.4 Mayer-Vietoris 序列

以上我们讨论的是奇异同调群的基本概念和基本性质,它们为我们计算同调群,并进而利用同调群理论研究有关拓扑空间的性质,提供了一定的工具和方法,但回想已掌握的奇异同调理论,我们感到计算同调群的方法十分有限,除个别空间的同调群我们已完全知晓,少数空间的低维同调群有所了解外,稍复杂一点空间的同调群(尤其是高维同调群),我们至今无法得到,为此,从本节开始,我们打算丰富一些求同调群的手段和途径.

为给出关于同调群的 Mayer-Vietoris 序列,我们先叙述有关同调代数的基本知识.

Abel 群及其同态三元组 $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$ 称为**正合的**$\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g$;Abel 群及其同态序列

$$\cdots \to G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} \cdots$$

称为**正合的**$\Leftrightarrow$其每三元组均为正合的.

例 1 一链复形 $C=\{C_n, \partial_n\}$ 是正合的$\Leftrightarrow H_n(C)=0, n\in Z$.

例 2 三元组 $0 \to C \xrightarrow{f} D$ 正合,则 f 为单同态,此时记作

$C \rightarrowtail D$；三元组 $D \xrightarrow{g} E \to 0$ 正合，则 g 为满同态，此时记作 $D \twoheadrightarrow E$；而当 $0 \to C \to D \to 0$ 正合时，记作 $C \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow D$.

对于链复形及其链映射的组

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0,$$

称其为**短正合的**$\Leftrightarrow$对 $\forall n \in Z$，

$$0 \to C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \to 0,$$

是 Abel 群及其同态组的短正合列.

易见，对上述链复形的短正合列，我们有如下可换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & D_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & E_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \partial\downarrow & & \partial\downarrow & & \partial\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \partial\downarrow & & \partial\downarrow & & \partial\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}$$

从而相应于 n：

$$H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E),$$

相应于 $n-1$：

$$H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(D) \xrightarrow{g_*} H_{n-1}(E).$$

为了能将上述各同调群及其同态组联系起来，我们定义**联结同态** ∂_* ：$H_n(E) \to H_{n-1}(C)$如下：

设 $e_n \in Z_n(E)$，因为 g_n 满，所以 $\exists\, d_n \in D_n$ 使 $g_n(d_n) = e_n$. 又由上图的可换性，$g_{n-1}(\partial d_n) = \partial g_n(d_n) = \partial e_n = 0$，从而 $\exists\, c_{n-1} \in C_{n-1}$，使 $f_{n-1}(c_{n-1}) = \partial d_n$. 再注意到 $f_{n-2}(\partial c_{n-1}) = \partial f_{n-1}(c_{n-1}) = \partial^2 d_n$

$=0$，且 f_{n-2} 单，所以 $\partial c_{n-1}=0$，即 $c_{n-1}\in Z_{n-1}(C)$，取对应

$$e_n \longrightarrow c_{n-1}.$$

另外，若 e_n, e'_n 是 $Z_n(E)$ 中同调的闭链，则 $\exists e_{n+1}\in E_{n+1}$，使 $e_n-e'_n=\partial e_{n+1}$. 设 d_n, d'_n 满足 $g_n(d_n)=e_n, g_n(d'_n)=e'_n$，而 c_{n-1}，$c'_{n-1}\in C_{n-1}$ 使 $f_{n-1}(c_{n-1})=\partial d_n, f_{n-1}(c'_{n-1})=\partial d'_n$. 因 g_{n+1} 满，所以 $\exists d_{n+1}$ 使 $g_{n+1}(d_{n+1})=e_{n+1}$，且 $g_n(\partial d_{n+1})=\partial g_{n+1}(d_{n+1})=\partial e_{n+1}=e_n-e'_n=g_n(d_n-d'_n)$，即 $d_n-d'_n-\partial d_{n+1}\in \mathrm{Ker}g_n=\mathrm{Im}f_n$，即 $\exists c_n\in C_n$ 使 $f_n(c_n)=d_n-d'_n-\partial d_{n+1}$，所以 $f_{n-1}(\partial c_n)=\partial f_n(c_n)=\partial d_n-\partial d'_n=f_{n-1}(c_{n-1}-c'_{n-1})$，而 f_{n-1} 单，所以 $c_{n-1}-c'_{n-1}=\partial c_n$，所以 c_{n-1} 与 c'_{n-1} 在 $Z_{n-1}(C)$ 的同一同调群中. 至此，我们有：

6.4.1 定义 称上述同态 $\partial_*: H_n(E)\to H_{n-1}(C)$，$\partial_*([e_n])=[c_{n-1}]$ 为短正合列 $0\to C\xrightarrow{f}D\xrightarrow{g}E\to 0$ 的**联结同态**.

6.4.2 定理 设有二链复形短正合列的可换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \to 0\\
 & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & \\
0\to & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \to 0
\end{array}$$

则 $\exists$ 同调长正合序列的可换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\to H_n(C) & \xrightarrow{f_*} & H_n(D) & \xrightarrow{g_*} & H_n(E) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(C) & \xrightarrow{f_*} & \cdots\\
\alpha_*\downarrow & & \beta_*\downarrow & & \gamma_*\downarrow & & \alpha_*\downarrow & & \\
\cdots\to H_n(C') & \xrightarrow{f'_*} & H_n(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(E') & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{n-1}(C') & \xrightarrow{f'_*} & \cdots
\end{array}$$

证明 先证上、下二同调长序列的正合性：

(1) 在 $H_n(D)$ 处的正合性：$\mathrm{Im}f_*=\mathrm{Ker}g_*$. 因 $gf=0$，所以 $g_*f_*=0$，从而 $\mathrm{Im}f_*\subset \mathrm{Ker}g_*$；对 $\forall[z]\in\mathrm{Ker}g_*$，则 $g_*[z]=[g(z)]=0\Rightarrow g(z)=\partial e=\partial g(d)=g(\partial d)$，即 $g(z-\partial d)=0\Rightarrow\exists c\in C_n$

使 $f(c)=z-\partial d$. 注意 $\partial f(c)=f(\partial c)=\partial z=0$，而 f 单，所以 $\partial c=0$，所以 c 为闭链，$f(c)$ 亦为闭链，且 $f_*([c])=[f(c)]=[z]\in \mathrm{Im}f_*$，所以 $\mathrm{Im}f_*=\mathrm{Ker}g_*$.

(2) 在 $H_n(E)$ 处的正合性：$\mathrm{Im}g_*=\mathrm{Ker}\partial_*$. 由定义 6.4.1 易见 $\partial_* g_*=0$，所以 $\mathrm{Im}g_*\subset\mathrm{Ker}\partial_*$；反之若 $[z]\in\mathrm{Ker}\partial_*$，即 $\partial_*([z])=0$，据 ∂_* 的定义，$\exists\, d_n\in D_n$ 及 $c_{n-1}\in Z_{n-1}(C)$ 使 $g_n(d_n)=z$，$f_{n-1}(c_{n-1})=\partial d_n$，且 $[c_{n-1}]=\partial_*([z])=0$. 所以 $\exists\, c_n\in C_n$，使 $\partial c_n=c_{n-1}$，即 $\partial d_n=f_{n-1}(\partial c_n)=\partial f_n(c_n)$，$[z]=[g_n(d_n)]=[g_n(d_n)-g_nf_n(c_n)]=[g_n(d_n-f_n(c_n))]=g_*([d_n-f_n(c_n)])\in\mathrm{Im}g_*$.

(3) 在 $H_{n-1}(C)$ 处的正合性：$\mathrm{Im}\partial_*=\mathrm{Ker}f_*$. 由定义 6.4.1 易知 $f_*\partial_*=0$，所以 $\mathrm{Im}\partial_*\subset\mathrm{Ker}f_*$；反之若 $[z]\in\mathrm{Ker}f_*$，则 $f_*([z])=[f(z)]=0$. 所以 $\exists\, d\in D_n$ 使 $\partial d=f(z)$，从而

$$\partial g(d)=g(\partial d)=g(f(z))=0,$$

$$[g(d)]\in H_n(E),\text{且}$$

$$\partial_*([g(d)])=[z]\in\mathrm{Im}\partial_*.$$

(4) 最后证方块的可换性：只需证：$\alpha_*\partial_*=\partial'_*\gamma_*$.

对 $\forall\,[z]=[g(d)]\in H_n(E)$，若

$$\partial_*([z])=\partial_*([g(d)])=[c],$$

其中 $\partial d=f(c)$，因此 $\alpha_*\partial_*([z])=[\partial(c)]$，但 $f'\alpha(c)=\beta f(c)=\beta\partial d=\partial(\beta(d))$，从而

$$\begin{aligned}[\alpha(c)]&=\partial'_*([g'\beta(d)])=\partial'_*([\gamma g(d)])=\partial'_*\gamma_*([g(d)])\\&=\alpha'_*\gamma_*([z]).\end{aligned}$$

所以
$$\alpha_*\partial_*=\partial'_*\gamma_*. \qquad \blacksquare$$

上述定理 6.4.2 的结果，我们称其为同调正合序列的**自然性**，它将是我们下面给出的关于同调群的 **Mayer-Vietoris 序列**（简称 **M-V 序列**）的基础. 不过，在正式引入 M V 序列之前，我们还有些准备工作要作.

设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的任一覆盖，$S_n^{\mathscr{U}}(X)$ 表示由 n 维奇异单形 $\sigma^n:\triangle^n\to X$，$\sigma^n(\triangle^n)\subset U\in\mathscr{U}$ 生成的 $S_n(X)$ 的子群，易见

$$\mathrm{Im}\partial_t\sigma^n \subset \mathrm{Im}\sigma^n.$$

从而有边缘算子

$$\partial_n : S_n^{\mathscr{U}}(X) \to S_{n-1}^{\mathscr{U}}(X).$$

由此，对 X 的任一覆盖 $\mathscr{U}$，存在一链复形 $S^{\mathscr{U}}(X)=\{S_n^{\mathscr{U}}(X),\partial_n\}$，且易见含入映射

$$i_x : S^{\mathscr{U}}(X) \to S(X)$$

是一链映射，注意若 $\mathscr{V}$ 是拓扑空间 Y 的一覆盖，且映射 $f: X\to Y$ 满足对 $\forall U\in\mathscr{U}$，$\exists V\in\mathscr{V}$，使 $f(U)\subset V$，则 $\exists$ 链映射

$$f_\# : S^{\mathscr{U}}(X) \to S^{\mathscr{V}}(Y),$$

且

$$f_\# i_X = i_Y f_\#.$$

我们现在给出在计算空间的同调群时，起本质作用的一个工具. 由于该结论的证明，涉及较多的预备知识，在此我们将其略去，读者可参看文献[1]或[3].

6.4.3 定理 设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的子集簇，使得 $\mathrm{Int}\mathscr{U}$(由 $\mathscr{U}$ 的成员内部构成的子集簇)覆盖 X，则

$$i_* : H_n(S^{\mathscr{U}}(X)) \to H_n(X)$$

是一个同构，$n\in Z$.

思考 定理 6.4.3 中的条件"$\mathrm{Int}\mathscr{U}$ 覆盖 X"是必需的吗？为什么？

作为上述定理 6.4.3 的一个直接应用，我们现在给出关于空间同调群的 Mayer-Vietoris 序列：

设 $U,V\subset X$，且 $\mathrm{Int}U\cup\mathrm{Int}V=X$，$\mathscr{U}=\{U,V\}$，且下图中的映射全为含入

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & {\scriptstyle i}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle k} & \\ U\cap V & & & & X \\ & {\scriptstyle j}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle l} & \\ & & V & & \end{array}$$

则我们首先有

6.4.4 引理 设符号表示意义如上，则∃链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow S(U \cap V) \xrightarrow{g_\#} S(U) \oplus S(V) \xrightarrow{h_\#} S^{\mathfrak{U}}(X) \longrightarrow 0,$$

其中 $g_\#(c)=(i_\#(c),-j_\#(c)), h_\#(d_1,d_2)=k_\#(d_1)+l_\#(d_2)$.

证明 由 $S^{\mathfrak{U}}(X)$的定义，可知 $h_\#$ 是满的；另外，$g_\#$ 是单的，因 $i_\#$ 和 $j_\#$ 都是单的. 所以，只需证：$\mathrm{Im} g_\# = \mathrm{Ker} h_\#$.

因
$$h_\# \circ g_\#(c)=h_\#(i_\#(c),-j_\#(c))$$
$$=k_\# i_\#(c)-h_\# j_\#(c)=c-c=0,$$

所以
$$\mathrm{Im} g_\# \subset \mathrm{Ker} h_\#.$$

反之，若

$$h_\#(d_1,d_2) = k_\#(d_1) + l_\#(d_2) = 0,$$

设

$$d_1 = \sum k_i \sigma_i, d_2 = \sum l_j \alpha_j,$$

其中 σ_i 和 α_j 分别是 U 和 V 中的奇异单形，因此作为 X 中的奇异链

$$\sum k_i \sigma_i + \sum l_j \alpha_j = 0.$$

由于 $S(X)$是自由 Abel 群族，所以对每个 $k_i \neq 0$，必∃某 j，使 $\sigma_i = \alpha_j$，且 $k_i = -l_j$；同理对每个 $l_j \neq 0$，∃某 i，使 $\alpha_j = \sigma_i$，且 $l_j = -k_i$. 从而 $d_1, d_2 \in S(U \cap V)$，且 $d_1 = -d_2$. 所以，

$$(d_1,d_2)=(-d_2,d_2)=g_\#(-d_2) \in \mathrm{Im} g_\#.$$ ■

6.4.5 定理 （Mayer-Vietoris 序列）设 $U, V \subset X$，使得 $\mathrm{Int} U \cup \mathrm{Int} V = X$，则∃长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*}$$
$$H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots,$$

其中 $g_*([z])=(i_*([z]),-j_*([z]))$,

$$h_*([x],[y])=k_*([x])+l_*([y]).$$

证明 由引理 6.4.4、定理 6.4.2 和定理 6.4.3 即得. ■

利用定理 6.4.2,我们还可得到如下推论.

6.4.6 推论 设 $\mathrm{Int}U\cup\mathrm{Int}V=X$, $\mathrm{Int}U'\cup\mathrm{Int}V'=X'$,而 f: $X,U,V\to X',U',V'$,则下有下面长正合列的可换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}\cdots\to & H_n(U\cap V) & \xrightarrow{g_*} & H_n(U)\oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_*} & H_n(X) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(U\cap V) & \to\cdots \\ & \downarrow f_* & & \downarrow f_*\otimes f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\ \cdots\to & H_n(U'\cap V') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(U')\oplus H_n(V') & \xrightarrow{h'_*} & H_n(X') & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{n-1}(U'\cap V') & \to\cdots.\end{array}$$

为灵活多变地利用 Mayer-Vietoris 序列,研究同调群的有关问题,本节的最后,我们再给出 Mayer-Vietoris 序列另一更好利用的形式.

设 $A\subset X$ 是拓扑空间 X 的强形变收缩核,则由推论 6.3.3, $H_n(A)\cong H_n(X)$, $n\in Z$. 由此我们还有:

6.4.7 推论 设 $X_1,X_2\subset X$ 闭,且 $X=X_1\cup X_2$,而 $A:=X_1\cap X_2$是其某邻域 U 的强形变收缩核,则有下述 Mayer-Vietoris 序列成立

$$\cdots\to H_n(A)\xrightarrow{g_*}H_n(X_1)\oplus H_n(X_2)\xrightarrow{h_*}H_n(X)\xrightarrow{\partial_*}H_{n-1}(A)\to\cdots.$$

事实上

(1) 令 $U_i=U\cup X_i$, $i=1,2$,则 U_i 是 X_i 的邻域,这是因为若 $x\in X_i$ 但 $x\notin U$,则 $x\in X\setminus X_j\subset X_i\subset U_i$ $(j\neq i)$.

(2) X_i 是 U_i 的强形变收缩核,这是因为若令 $h: U\times I\to U$ 是 U 到 A 的强形变收缩,则 $h_i: U_i\times I\to U_i$,

$$h_i(x,t)=\begin{cases}x, x\in X_i,\\ h(x,t), x\in U\setminus(X_i\setminus A)\end{cases}$$

便是 U_i 到 X_i 的强形变收缩.

(3) 由(1), $\mathrm{Int}U_1\cup\mathrm{Int}U_2=X$.

所以　∃长正合列

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\to H_n(U_1\cap U_2) & \xrightarrow{g_*} & H_n(U_1)\oplus H_n(U_2) & \xrightarrow{h_*} & H_n(X) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(U_1\cap U_2) & \to\cdots \\
\| & & \wr\| & & \| & & \| & \\
\cdots\to H_n(U) & \xrightarrow{g_*} & H_n(X_1)\oplus H_n(X_2) & \xrightarrow{h_*} & H_n(X) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(U) & \to\cdots \\
\wr\| & & \| & & \| & & \wr\| & \\
\cdots\to H_n(A) & \xrightarrow{g_*} & H_n(X_1)\oplus H_n(X_2) & \xrightarrow{h_*} & H_n(X) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \to\cdots.
\end{array}$$

即有长正合列

$$\cdots\to H_n(A)\xrightarrow{g_*}H_n(X_1)\oplus H_n(X_2)\xrightarrow{h_*}H_n(X)\xrightarrow{\partial_*}H_{n-1}(A)\to\cdots.$$

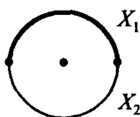


图 6.4.1

例　求圆 S^1 的同调群.

取 S^1 的上、下半圆分别为 X_1,X_2(如图 6.4.1),则 $A:=X_1\cap X_2=S^0$,由推论 6.4.7,有长正合列

$$\cdots\to H_n(S^0)\to H_n(X_1)\oplus H_n(X_2)\to H_n(S^1)\to H_{n-1}(S^0)\to\cdots.$$

当 $n>1$ 时

$$\begin{array}{ccccccc}
H_n(S^0) & \to & H_n(X_1)+H_n(X_2) & \to & H_n(S^1) & \to & H_{n-1}(S^0) \\
\wr\| & & \wr\| & & \| & & \wr\| \\
0 & \longrightarrow & 0\oplus 0 & \longrightarrow & H_n(S^1) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

所以
$$H_n(S^1)=0.$$

而当 $n=1$ 时,$H_1(S^1)=\pi_1(S^1,x_0)/[\pi_1,\pi_1]=Z$,从而对 S^1,有

$$H_n(S^1)=\begin{cases}Z, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$$

习 题

1. 证明下列命题：

(1) 设有短正合列 $0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \longrightarrow 0$，则 $\exists k: E \to D$，使 $jk = I_E \Leftrightarrow i(C)$ 是 D 的直加项.（此时称上述短正合列为**裂正合**的）；

(2) 若短正合列 $0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \longrightarrow 0$ 中，E 是自由 Abel 的，则其必是裂正合的.

2. 设有下列 Abel 群及其同态的可换图，且每行都是正合序列.

$$\begin{array}{ccccccccc} C_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & C_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & C_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & C_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & C_5 \\ \downarrow{\gamma_1} & & \downarrow{\gamma_2} & & \downarrow{\gamma_3} & & \downarrow{\gamma_4} & & \downarrow{\gamma_5} \\ D_1 & \xrightarrow{\beta_1} & D_2 & \xrightarrow{\beta_2} & D_3 & \xrightarrow{\beta_3} & D_4 & \xrightarrow{\beta_4} & D_5 \end{array}$$

证明若 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_5$ 均为同构，则 γ_3 也是同构（此命题称为五引理）.

3. 用正合列证明若 $X \neq \emptyset$，则 $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus Z$.

4. 直接利用定理 6.4.5，求 $H_n(S^1)$ $n \in Z$.

5. 设 $\mathrm{Int}U \cup \mathrm{Int}V = X, U \cap V \neq \emptyset$，试表述并论证简约同调群的 Mayer-Vietoris 序列.

6. 针对简约同调，试表述并论证推论 6.4.7 的一个类似.

6.5 同调论的一些应用

本节作为前面同调理论的一个应用，我们首先去研究球面的同调性质，并由此得到关于球面的一些著名结果；然后我们将归纳并进一步丰富计算同调群的手段和方法.

首先,关于球面的同调性质,我们有:

6.5.1 定理 $\widetilde{H}_m(S^n)=\begin{cases}Z, & m=n,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$

证明 当 $n=0$ 时,定理显然.

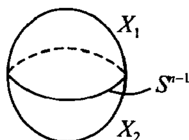


图 6.5.1

当 $n>0$ 时,同上节末例子中一样,令 X_1,X_2 分别是 S^n 的上、下半球面,则 $A=X_1\cap X_2=S^{n-1}$,且有简约同调群的长正合列(6.4 节习题 6)

$$\cdots\to\widetilde{H}_m(X_1)\oplus\widetilde{H}_m(X_2)\to\widetilde{H}_m(S^n)\to\widetilde{H}_{m-1}(S^{n-1})\to$$
$$\widetilde{H}_{m-1}(X_1)\oplus\widetilde{H}_{m-1}(X_2)\to\cdots.$$

但由 6.3 节习题 1,$\widetilde{H}_q(X_i)=0$(X_i 可缩),

所以
$$\widetilde{H}_m(S^n)\cong\widetilde{H}_{m-1}(S^{n-1}),$$
$$\widetilde{H}_m(S^n)=\begin{cases}Z, & m=n,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$ ■

6.5.2 推论 S^n 同胚于 $S^m\Leftrightarrow n=m$,从而 R^n 同胚于 $R^m\Leftrightarrow n=m$.

6.5.3 推论 $(n+1)$维圆盘 D^{n+1}不以 S^n 为收缩核.

事实上,若不然,则 ∃ 收缩映射 $r:D^{n+1}\to S^n$,使 $r|S^n=I_{S^n}$,即 $ri=I_{S^n}$,所以

$$r_*i_*=I_{\widetilde{H}_*(S^n)}.$$

注意 $\widetilde{H}_n(S^n)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_n(D^{n+1})\xrightarrow{r_*}\widetilde{H}_n(S^n)$,

由于 $\widetilde{H}_n(D^{n+1})=0$，且 $\widetilde{H}_n(S^n)=Z$，所以不可能有

$$r_* i_* = I_{\widetilde{H}_*(S^n)}.$$

6.5.4 推论 （Brouwer 不动点定理）映射 $f: D^n \to D^n$ 必有不动点，即 $\exists x \in D^n$，使

$$f(x)=x.$$

事实上，假若对 $\forall x \in D^n, f(x) \neq x$，则（如图 6.5.2）

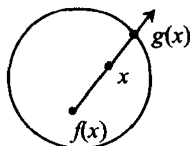


图 6.5.2

$\exists$ 连续映射

$$g: D^n \to S^{n-1},$$

且

$$g \mid S^{n-1} = I_{S^{n-1}}.$$

所以 g 是 D^n 到 S^{n-1} 上的收缩映射，这与推论 6.5.3 不符.

设 $n \geqslant 1, f: S^n \to S^n$ 为一映射，选取同调群 $\widetilde{H}_n(S^n) \cong Z$ 的生成元 α，因 $f_*: \widetilde{H}_n(S^n) \to \widetilde{H}_n(S^n)$ 为同态，所以 $\exists$ 整数 m，使 $f_*(\alpha)=m\alpha$. 注意整数 m 显然与 $\widetilde{H}_n(S^n)$ 的生成元的选取无关，称该整数 m 为映射 f 的 **Brouwer 度**，简称 f 的度，记作 $\deg(f)$.

由前面的结果，映射度 $\deg(f)$ 有如下明显的基本性质：

(1) $\deg(I)=1, \deg(c)=0$;

(2) 若 $f, g: S^n \to S^n$，则 $\deg(fg)=\deg(f) \cdot \deg(g)$;

(3) 若 $f \simeq g: S^n \to S^n$，则 $\deg(f)=\deg(g)$;

(4) 若 f 是一同伦等价，则 $\deg(f)=\pm 1$.

另外，关于球面的映射度，我们还有如下重要结果：

6.5.5 命题 设 $f: S^n \to S^n (n \geqslant 1)$ 定义为

$$f(x_0, \cdots, x_n) = (-x_0, x_1, \cdots, x_n),$$

则 $\deg(f) = -1$.

证明 对 $n=0$,设 $\sigma: \Delta^0 \to S^0, \sigma(1)=1; \alpha: \Delta^0 \to S^0, \alpha(1)=-1$,则 $\alpha=-\sigma$,对 $\widetilde{H}_0(S^0)$ 的生成元 $(\sigma, -\alpha)$,

$$f_*(\sigma, -\alpha) = (f\sigma, -f\alpha) = (\alpha, -\sigma) = (-\sigma, \alpha) = -(\sigma, -\alpha),$$

所以

$$\deg(f) = -1.$$

当 $n \geqslant 1$ 时,参照定理 6.5.1 的证明过程,我们发现

$$f: (S^n, X_1, X_2) \to (S^n, X_1, X_2),$$

所以由同调正合序列的自然性,有

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to \widetilde{H}_n(X_1) \oplus \widetilde{H}_n(X_2) & \to & \widetilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\partial_*} & \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \to & \widetilde{H}_{n-1}(X_1) \oplus \widetilde{H}_{n-1}(X_2) \to \cdots \\
\downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
\cdots \to \widetilde{H}_n(X_1) \oplus \widetilde{H}_n(X_2) & \to & \widetilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\partial_*} & \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \to & \widetilde{H}_{n-1}(X_1) \oplus \widetilde{H}_{n-1}(X_2) \to \cdots.
\end{array}$$

而

$$\widetilde{H}_n(X_1) = \widetilde{H}_n(X_2) = \widetilde{H}_{n-1}(X_1) = \widetilde{H}_{n-1}(X_2) = 0,$$

所以 ∂_* 是同构,即 $\deg(f_*)_n = \deg(f_*)_{n-1} = -1$. 其中 $\deg(f_*)_i$ 表示限制 $f|S^i$ 的映射度. ■

6.5.6 推论 设 $a: S^n \to S^n$ 为对径映射 $a(x) = -x$,则 $\deg(a) = (-1)^{n+1}$.

6.5.7 命题 设 $f: S^n \to S^n$ 为 R^n 的正交变换在 S^n 上的限制,则 $\deg(f) = \det(f)$.

证明 由 4.1 节习题 5,若 $\det(f) = 1$,则 $f \simeq I$,

所以

$$\deg(f) = 1 = \det(f).$$

若 $\det(f) = -1$,取命题 6.5.5 中的映射为 g,则

$$\det(fg) = 1.$$

所以 $\deg(fg) = \det(fg) = 1$,但 $-\deg(f) = \deg(f)\deg(g) = \deg(fg) = 1$,所以

$$\deg(f) = -1 = \det(f). \qquad \blacksquare$$

平面上一条闭曲线，必把平面分成两块，而且它们均以这条闭曲线作为公共边界，这就是著名的 Jordan 曲线定理．该定理直观上很显然，但其证明并不容易，至于其在高维情形的推广更是抽象和艰深，在这里，我们将利用同调理论研究它．为此，我们先证：

6.5.8 引理 设 $A\subset S^n$，且 $A\cong I^k$，$0\leqslant k\leqslant n$，则

$$\widetilde{H}_q(S^n\backslash A) = 0, \forall q \in Z.$$

证明 当 $k=0$ 时，因为 $A\cong I^0=pt$，所以

$$\widetilde{H}_q(S^n\backslash A) \cong \widetilde{H}_q(S^n\backslash pt) = \widetilde{H}_q(R^{n-1}) = 0.$$

假设引理对 $k-1$ 正确，但对 k 不对，令

$$I_1^k = \{(x_0,\cdots,x_{k-1}) \in I^k; x_0 \geqslant \frac{1}{2}\},$$

$$I_2^k = \{(x_0,\cdots,x_{k-1}) \in I^k; x_0 \leqslant \frac{1}{2}\}.$$

若同胚 $\varphi: I^k\to A$，令 $A_i=\varphi(I_i^k)$，$i=1,2$，而

$$U_+ = S^n\backslash A_1, U_- = S^n\backslash A_2,$$

则

$$U_+ \cup U_- = S^n\backslash(A_1 \cap A_2) = S^n\backslash\varphi(I_1^k \cap I_2^k) = S^n\backslash\varphi(I^{k-1})$$
$$= S^n\backslash A' \qquad (A' := \varphi(I^{k-1})).$$

$U_+\cap U_- = S^n\backslash(A_1\cup A_2) = S^n\backslash A\neq\varnothing$（因 A 可缩，但 S^n 不可缩）．所以由简约同调的 Mayer-Vietoris 序列

$$\widetilde{H}_{q+1}(S^n\backslash A') \to \widetilde{H}_q(S^n\backslash A) \to \widetilde{H}_q(S^n\backslash A_1) \oplus \widetilde{H}_q(S^n\backslash A_2)$$

是正合的，但 $\widetilde{H}_{q+1}(S^n\backslash A')=0$（归纳假设）．

假若 $\exists\,\alpha\in\widetilde{H}_q(S^n\backslash A)$，且可取到类似上述的 A_1 或 A_2，记其为 $A^{(1)}$，使得在

$$\widetilde{H}_q(S^n\backslash A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(S^n\backslash A^{(1)})$$

下，$i_*(\alpha)\neq 0$，依此作法可得空间序列

$$A \supset A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset \cdots, \qquad \bigcap A^{(i)} = pt,$$

其中每一 $A^{(i)} \cong A$，使得在

$$\widetilde{H}_q(S^n \backslash A) \xrightarrow{i_*^{(m)}} \widetilde{H}_q(S^n \backslash A^{(m)})$$

下，$i_*^{(m)}(\alpha) \neq 0$，其中 $i^{(m)}$ 是 $S^n \backslash A$ 在 $S^n \backslash A^{(m)}$ 中的含入. 记代表 α 的闭链为 z^q. 由于

$$\widetilde{H}_q(S^n \backslash pt) = 0,$$

所以 $\exists\, S^n \backslash pt$ 中的 $q+1$ 维链 c^{q+1}，使得

$$z^q = \partial c^{q+1} = \partial(\sum m_j \sigma_j^{q+1}).$$

由于 $\sigma_j^{q+1} \subset S^n \backslash pt$ 紧，且它们是有限个，而开集 $S^n \backslash A \subset S^n \backslash A^{(1)} \subset \cdots \subset S^n \backslash A^{(i)} \subset \cdots$ 覆盖所有的 σ_j^{q+1}，所以必 $\exists\, m$，使 c^{q+1} 是 $S^n \backslash A^{(m)}$ 中的奇异链，即 z^q 在 $S^n \backslash A^{(m)}$ 中已是边缘，即 $i_*^{(m)}(\alpha) = 0$，矛盾. ■

6.5.9 推论 若 $B \subset S^n$ 是同胚于 $S^k(0 \leqslant k < n)$ 的子集，则

$$\widetilde{H}_q(S^n \backslash B) = \begin{cases} Z, & q = n-k-1, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

证明 采用归纳法去证.

首先，当 $k=0$ 时，S^k 是两点，而 $S^n \backslash B$ 与 S^{n-1} 有相同的伦型，

所以 $$\widetilde{H}_q(S^n \backslash B) = \widetilde{H}_q(S^{n-1}) = \begin{cases} Z, & q = n-1, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

结论成立.

假设结论对 $k-1$ 正确，而对于 k，记

$$B = B^+ \cup B^-,$$

其中 B^+ 和 B^- 是 S^k 中的闭半球，且 $B^+ \cap B^-$ 同胚于 S^{k-1}. 由简约同调的 Mayer-Vietoris 序列，

$$\begin{aligned} &\widetilde{H}_{q+1}(S^n \backslash B^+) \oplus \widetilde{H}_{q+1}(S^n \backslash B^-) \\ &\to \widetilde{H}_{q+1}(S^n \backslash (B^+ \cap B^-)) \\ &\to \widetilde{H}_q(S^n \backslash B) \\ &\to \widetilde{H}_q(S^n \backslash B^+) \oplus \widetilde{H}_q(S^n \backslash B^-) \end{aligned}$$

是正合的. 但由引理 6.5.8，上式两端均为 0，所以

$$
\begin{aligned}
\widetilde{H}_q(S^n\backslash B) &\cong \widetilde{H}_{q+1}(S^n\backslash(B^+\cap B^-)) \\
&\cong \widetilde{H}_{q+1}(S^n\backslash S^{k-1}) \\
&\xlongequal{\text{归纳假设}} \begin{cases} Z, & q=n-k-1, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}
\end{aligned}
$$
■

利用上述推论,我们即可证明下面著名的 Jordan-Brouwer 分割定理.

6.5.10 定理 嵌入于 S^n 的任一个 $n-1$ 维球面 S^{n-1} 分割 S^n 成两部分,这两部分以 S^{n-1} 为公共边界.

证明 由推论 6.5.9,$\widetilde{H}_0(S^n\backslash S^{n-1})=Z$,所以 $S^n\backslash S^{n-1}$ 有两个道路连通分支,但因 S^{n-1} 闭,所以 $S^n\backslash S^{n-1}$ 开且为局部道路连通,这意味着道路连通分支即是连通分支.

如图 6.5.3,设 C_1,C_2 是 $S^n\backslash S^{n-1}$ 的二连通分支,因 C_i 在 S^n 中开且 $C_i\cup S^{n-1}$ 闭,所以 $\partial C_i\subset S^{n-1}$(注意:$\partial C_i=\overline{C}_i\backslash \text{Int}C_i$). 我们下面只需证 $S^{n-1}\subset\partial C_i$. 对 $\forall x\in S^{n-1}\subset S^n$,及 x 在 S^n 中任一邻域 U,今证 $U\cap C_i\neq\emptyset$. 为此,将 S^{n-1} 分成二闭集 A_1,A_2 之并,且使 $x\in A_1\subset U$,$A_i\cong I^{n-1}$,$A_1\cap A_2\cong S^{n-2}$. 由引理 6.5.8,$S^n\backslash A_2$ 道路连通,所以,任取 $p_1\in C_1$,$p_2\in C_2$,则 p_1,p_2 必可用 $S^n\backslash A_2$ 中的一道路 γ 连接,而 γ 必与 A_1 有交点. 所以 $U\cap C_i\neq\emptyset$,即 $x\in\partial C_i$,$i=1,2$.

■

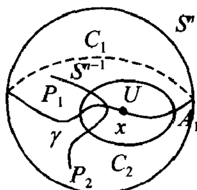


图 6.5.3

6.5.11 推论 当 $n\geqslant 2$ 时,定理 6.5.10 中的 S^n 用 R^n 代替,结论仍然成立.

事实上，R^n 与 $S^n\setminus(0,0,\cdots,1)$同胚.

注 当 $n=2$ 时，上述推论正是 Jordan 曲线定理，试图对这一“直观明显”的事实所给出精确的数学证明，恰好印证了数学与绘图间的极大差异.

作为同调论的另一应用，我们下面再给出一个著名结果.

6.5.12 定理 （Brouwer 区域不变性定理）

设 U 是 S^n 中的开集，$h: U\to S^n$ 为单射，则 $h(U)$仍是 S^n 中的开集.

证明 $\forall x_2=h(x_1)\in h(U)$，取 x_1 在 U 中的邻域 $V\cong D^n$，且 $\partial V\cong S^{n-1}$，令 $V_1:=h(V)$，$\partial V_1:=h(\partial V)$，即$\partial V_1$ 是 S^n 的同胚于 S^{n-1}的子集.

由推论 6.5.9，$S^n\setminus V_1$ 是连通的；而由定理 6.5.10，$S^n\setminus\partial V_1$ 有两个连通分支，但 $S^n\setminus\partial V_1$ 是 $S^n\setminus V_1$ 与 $V_1\setminus\partial V_1$ 的不交并，且二者均连通，因而它们即为 $S^n\setminus\partial V_1$ 的二连通分支. 所以 $V_1\setminus\partial V_1$ 在 $S^n\setminus\partial V_1$中开，从而 $V_1\setminus\partial V_1$ 在 S^n 中开，而 $x_2=h(x_1)\in V_1\setminus\partial V_1\subset V_1\subset h(U)$，所以 $h(U)$是 S^n 中的开集. ■

6.5.13 推论 在上述定理中，用 R^n 代替 S^n 时结论仍真.

作为本节的第二个专题，我们打算通过对映射锥的简约同调长正合列的研究，再去丰富一些求同调群的方法.

6.5.14 定义 设 $A\subset X$ 为 X 的子空间，$f: A\to Y$ 为映射，在不交并 $X\amalg Y$ 上有一个二元关系 $R=\{(a,f(a))\mid a\in A\}$，由它产生的等价关系记为～，称商空间 $X\cup_f Y:=X\amalg Y/\sim$为 $X\supset A\xrightarrow{f}Y$ 的**粘贴空间**，其中 f 称为**粘贴映射**；若记 $\pi: X\amalg Y\to X\cup_f Y$ 为投射，称 $\bar{f}=\pi|X$为**特征映射**.

注 常用的粘贴空间有：

(1) **锥形**：即映射 $X\times I\supset X\times 1\to pt$ 的粘贴空间，记作 CX；

(2) **把子空间 $A\subset X$ 捏成一点**：即映射 $X\supset A\to pt$ 的粘贴空间，记作 X/A；从而 $CX=X\times I/X\times 1$；

(3) **贴胞腔于空间 X**：即映射 $D^n\supset S^{n-1}\xrightarrow{f}X$ 的粘贴空间，亦即 $D^n\cup_f X$；

(4) **映射柱**：设有映射 $f:X\to Y$，则映射 $X\times I\supset X\times 0\xrightarrow{f}Y$ 的粘贴空间，称为**映射柱**；

(5) **映射锥**：设 $f:X\to Y$，则映射 $CX\supset X\times 0\xrightarrow{f}Y$ 的粘贴空间，记作 $Cf:=CX\cup_f Y$，称为**映射锥**.

6.5.15 定理 设 $f:X\to Y$ 为映射，则有简约同调群的长正合列：

$$\cdots\to\widetilde{H}_q(X)\xrightarrow{f_*}\widetilde{H}_q(Y)\xrightarrow{e_*}\widetilde{H}_q(Cf)\xrightarrow{\hat{\partial}_*}\widetilde{H}_{q-1}(X)\to\cdots,$$

其中 $e:Y\to Cf:=CX\cup_f Y$ 为含入映射，$\hat{\partial}_*=p_*\Delta$，而

$$p:Cf\backslash Y\backslash v(\text{顶点})=X\times(0,1)\to X$$

是投射，

$$\Delta:\widetilde{H}_q(Cf)\to\widetilde{H}_{q-1}(Cf\backslash Y\backslash v)$$

是覆盖 $(Cf\backslash Y)\cup(Cf\backslash v)=Cf$ 的 Mayer-Vietoris 序列的联结同态.

证明 覆盖 $(Cf\backslash Y)\cup(Cf\backslash v)=Cf$ 的 Mayer-Vietoris 序列为

$$\cdots\to\widetilde{H}_q(Cf\backslash Y\backslash v)\to\widetilde{H}_q(Cf\backslash Y)\oplus\widetilde{H}_q(Cf\backslash v)\to\widetilde{H}_q(Cf)\xrightarrow{\Delta}\widetilde{H}_{q-1}(Cf\backslash Y\backslash v)\to\cdots.$$

但注意投射 p 是同伦等价，$Cf\backslash Y$ 可缩，且 $r:Cf\backslash v\to Y$ 为强形变收缩映射，所以有可换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\to\widetilde{H}_q(Cf\wedge Y\backslash v) & \to & \widetilde{H}_q(Cf\wedge v)\oplus\widetilde{H}_q(Cf\wedge Y) & \to & \widetilde{H}_q(Cf) & \xrightarrow{\Delta} & \widetilde{H}_{q-1}(Cf\wedge Y\backslash v)\to\cdots \\
\| & & & & & & \| \\
\widetilde{H}_q(X\times(0,1)) & & \downarrow r_* & & \| & & \widetilde{H}_{q-1}(X\times(0,1)) \\
p_*\updownarrow & & & & & & \updownarrow p_* \\
\cdots\to\widetilde{H}_q(X) & \xrightarrow{f_*} & \widetilde{H}_q(Y) & \xrightarrow{e_*} & \widetilde{H}_q(Cf) & \to & \widetilde{H}_{q-1}(X)\to\cdots.
\end{array}$$

所以有长正合列

$$\cdots\to\widetilde{H}_q(X)\xrightarrow{f_*}\widetilde{H}_q(Y)\xrightarrow{e_*}\widetilde{H}_q(Cf)\xrightarrow{\hat{\partial}_*}\widetilde{H}_{q-1}(X)\to\cdots. \quad ■$$

6.5.16 推论 对于 $A\subset X$,有长正合列

$$\cdots\to\widetilde{H}_q(A)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_q(X)\xrightarrow{j_*}\widetilde{H}_q(X\cup CA)\xrightarrow{\hat{\partial}_*}\widetilde{H}_{q-1}(A)\to\cdots.$$

6.5.17 推论 对空间 X 的**双角锥** $\sum X := X\times I/X\times 0, X\times 1$,有同构

$$\sigma:\widetilde{H}_q(X)\cong\widetilde{H}_{q+1}(\textstyle\sum X).$$

事实上,设有常值映射 $X\xrightarrow{c} pt$,则易见 $Cc=\sum X$,所以由定理 6.5.15,有正合列

$$\widetilde{H}_{q+1}(pt)\to\widetilde{H}_{q+1}(\textstyle\sum X)\to\widetilde{H}_q(X)\xrightarrow{c_*}\widetilde{H}_q(pt)$$

而
$$\widetilde{H}_*(pt)=0,$$
所以
$$\widetilde{H}_{q+1}(\textstyle\sum X)\cong\widetilde{H}_q(X).$$

6.5.18 推论 设将胞腔贴于空间 $X: D^n\supset S^{n-1}\xrightarrow{f}X$,则

$$\widetilde{H}_q(X)=\widetilde{H}_q(D^n\cup_f X),\ q\neq n,n-1,$$

且有正合列

$$0\to\widetilde{H}_n(X)\to\widetilde{H}_n(D^n\cup_f X)\to\widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1})\xrightarrow{f_*}\widetilde{H}_{n-1}(X)\to$$

$\widetilde{H}_{n-1}(D^n \cup_f X) \to 0.$

事实上，$D^n \cong CS^{n-1}$，所以

$$D^n \cup_f X = Cf.$$

由定理 6.5.15

$$\cdots \to \widetilde{H}_q(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{\rho_*} \widetilde{H}_q(D^n \cup_f X) \to \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \to \cdots,$$

当 $q \neq n, n-1$ 时，$\widetilde{H}_q(S^{n-1}) = \widetilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) = 0$，所以

$$\widetilde{H}_q(X) \cong \widetilde{H}_q(D^n \cup_f X).$$

而当 $q=n$ 时，有

$$0 \to \widetilde{H}_n(X) \to \widetilde{H}_n(D^n \cup_f X) \to \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_{n-1}(X) \to \widetilde{H}_{n-1}(D^n \cup_f X) \to 0.$$

6.5.19 推论 在推论 6.5.18 的假设下，

$$\widetilde{H}_{n-1}(D^n \cup_f X) \cong \widetilde{H}_{n-1}(X)/\mathrm{Im} f_{n-1*},$$

$$\widetilde{H}_n(D^n \cup_f X) = \widetilde{H}_n(X) \oplus \mathrm{Ker} f_{n-1*} \cong \begin{cases} \widetilde{H}_n(X), & \mathrm{Ker} f_{n-1*} = 0, \\ \widetilde{H}_n(X) \oplus Z, & \text{否则}, \end{cases}$$

其中 f_{n-1*} 是诱导同态 $f_*: \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \to \widetilde{H}_{n-1}(X)$.

事实上，该推论的第一结果是显然的. 对第二结果，由推论 6.5.18，可知有正合列

$$0 \to \widetilde{H}_n(X) \to \widetilde{H}_n(D^n \cup_f X) \to \mathrm{Ker} f_* \to 0.$$

由于 $\mathrm{Ker} f_* \subset \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) = Z$，所以上述正合列是可裂的. 从而

$$\widetilde{H}_n(D^n \cup_f X) \cong \widetilde{H}_n(X) \oplus \mathrm{Ker} f_{n-1*} \cong \begin{cases} \widetilde{H}_n(X), & \mathrm{Ker} f_{n-1*} = 0, \\ \widetilde{H}_n(X) \oplus Z, & \text{否则}. \end{cases}$$

注 上述推论 6.5.18、6.5.19 告诉我们，当贴 n 维胞腔于空间 X 时，

(1) 不影响其 n 和 $n-1$ 维以外的同调群；

（2）对于 $n-1$ 维同调群而言，贴一 n 维胞腔，可能填满 X 的一个"洞"；

（3）对于 n 维同调群而言，贴一 n 维胞腔，X 可能新增一个"洞".

利用上述关于粘贴空间的同调理论，我们可以完成一些重要拓扑空间的同调群的计算.

例 1 求证 $\widetilde{H}_q(X\vee S^1)\cong\widetilde{H}_q(X)$，$q\neq 0,1$，其中 $X\vee S^1$ 表示 X 与 S^1 的单点并.

事实上，取 $c: D^1\supset S^0\to X$ 为常值映射，则 $X\vee S^1\simeq D^1\cup_c X$，所以由推论 6.5.18，当 $q\neq 0,1$ 时，

$$\widetilde{H}_q(X\vee S^1)=\widetilde{H}_q(D^1\cup_c X)=\widetilde{H}_q(X).$$

注 （1）当 $q-1$ 时，由于

$$0\to\widetilde{H}_1(X)\to\widetilde{H}_1(X\vee S^1)\to\widetilde{H}_0(S^0)\xrightarrow{c_*}\widetilde{H}_0(X)\to\cdots.$$

而 $c_*=0$，所以由推论 6.5.19，

$$\widetilde{H}_1(X\vee S^1)=\widetilde{H}_1(X)\oplus Z;$$

当然，
$$\widetilde{H}_0(X\vee S^1)=\widetilde{H}_0(X).$$

（2）不难证明 $\widetilde{H}_q(\bigvee_{i=1}^{k}S_i^1)=\begin{cases}0, & q\neq 1,\\ \underbrace{Z\oplus\cdots\oplus Z}_{k\text{个}}, & q=1.\end{cases}$

例 2 求实、复射影空间的同调群.

为将射影空间看成粘贴空间，我们先证如下：

命题 设 X,Y,Z 为紧致的 Hausdorff 空间，$A\subset X$ 闭，记映射 $f: A\to Y$ 的粘贴空间为 $X\cup_f Y$. 若另有映射 $g: X\coprod Y\to Z$ 是满的，且 $g(u)=g(v)\Leftrightarrow$，u 与 v 在粘贴过程中等价，则

$$X\cup_f Y\cong Z.$$

事实上，设由上述的 g 确定的对应为

$$k: XU_f Y\to Z,$$

则图

$$\begin{array}{ccc} X \coprod Y & \xrightarrow{\pi} & X \cup_f Y \\ & g \searrow \quad \swarrow k & \\ & Z & \end{array}$$

可换，且 k 为一一对应. 又对 $\forall U \subset Z$ 开，因 $g = k\pi$，且 $g^{-1}(U) = \pi^{-1}k^{-1}(U)$ 开，所以 $k^{-1}(U)$ 开；又因 k 连续，再注意 $X \cup_f Y$，Z 均为紧的 Hansdorff 空间，所以，k 为同胚.

对 n 维实射影空间 $P^n = S^n/(x \sim -x, x \in S^n)$，记 $\pi_n: S^n \to P^n$ 为投影，且将 S^{n-1} 视为 S^n 的赤道 $\{(x_0, \cdots, x_{n-1}, 0)\}$，从而有自然含入 $i: P^{n-1} \to P^n$. 又记 S^n 的上半球面为 E^n_+，则

$$E^n_+ \supset S^{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} P^{n-1}.$$

今定义
$$g: E^n_+ \coprod P^{n-1} \to P^n,$$
使
$$g|E^n_+ = \pi_n|E^n_+, \quad g|P^{n-1} = i.$$
易见 g 满足上述命题，所以
$$P^n \cong E^n_+ \cup_{\pi_{n-1}} P^{n-1} \cong D^n \cup_{\pi_{n-1}} P^{n-1}.$$

对 n 维复射影空间 $CP^n = S^{2n+1}/(z_0, \cdots, z_n) \sim e^{i\theta}(z_0, \cdots, z_n)$，其中 z_i 为复数，且 $|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1$. 记 $\pi_n: S^{2n+1} \to CP^n$ 为投影，且令

$$D^{2n} = \{(z_0, \cdots, z_{n-1}, x); z_i \in \mathbf{C}, x \in \mathbf{R}^1,$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \sum |z_i|^2 + x^2 = 1\},$$

由于 $S^{2n-1} \subset D^{2n} \subset S^{2n+1}$，从而有自然含入
$$i: CP^{n-1} \to CP^n.$$

又
$$D^{2n} \supset S^{2n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} CP^{n-1},$$
于是可定义映射
$$g: D^{2n} \coprod CP^{n-1} \to CP^n,$$
使
$$g | D^{2n} = \pi_n | D^{2n}, \quad g | CP^{n-1} = i.$$
易见 g 满足上述命题，

所以
$$CP^n \cong D^{2n} \cup_{\pi_{n-1}} CP^{n-1}.$$

为计算简单起见，以下只计算 $\widetilde{H}_q(P^2)$、$\widetilde{H}_q(P^3)$ 和 $\widetilde{H}_q(CP^n)$.

(1) 当 $q\neq 2,1$ 时，$\widetilde{H}_q(P^2)=\widetilde{H}_q(P^1)=0$；

而
$$\widetilde{H}_1(P^2)=\widetilde{H}_1(P^1)/\mathrm{Im}\pi_1=Z/2Z=Z_2,$$
$$\widetilde{H}_2(P^2)=\widetilde{H}_2(P^1)=0,$$

即
$$\widetilde{H}_q(P^2)=\begin{cases}Z_2, & q=1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) 当 $q\neq 3,2$ 时，$\widetilde{H}_q(P^3)=\widetilde{H}_q(P^2)$，$\widetilde{H}_q(P^3)=0$. 所以如果 $q\neq 1,2,3$. 而
$$\widetilde{H}_1(P^3)=\widetilde{H}_1(P^2)=Z_2.$$

当 $q=3,2$ 时，
$$\begin{aligned}\widetilde{H}_3(P^3)&=\widetilde{H}_3(D^3\cup_{\pi_2}P^2)=\widetilde{H}_3(P^2)\oplus\mathrm{Ker}(\pi_2)_*\\&=\mathrm{Ker}(\pi_2)_*=\widetilde{H}_2(S^2)=Z;\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\widetilde{H}_2(P^3)&=\widetilde{H}_2(D^3\cup_{\pi_2}P^2)=\widetilde{H}_2(P^2)/\mathrm{Im}(\pi_2)_*\\&=0,\end{aligned}$$

即
$$\widetilde{H}_q(P^3)=\begin{cases}Z_2, & q=1,\\ Z, & q=3,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(3) 今证
$$\widetilde{H}_q(CP^n)=\begin{cases}Z, & q=2,4,\cdots,2n,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$
事实上，当 $n=0$ 时，$CP^0=pt$，结论显然；当 $n=1$ 时 $CP^1=S^2$，结论亦成立.

设对 $m<n$ 结论成立. 由于
$$CP^n\cong D^{2n}\cup_{\pi_{n-1}}CP^{n-1},$$
所以当 $q\neq 2n,2n-1$ 时
$$\widetilde{H}_q(CP^n)=\widetilde{H}_q(CP^{n-1}).$$
而当 $q=2n-1,2n$ 时，
$$\widetilde{H}_{2n-1}(CP^n)=\widetilde{H}_{2n-1}(CP^{n-1})/\mathrm{Im}(\pi_{n-1})_*$$

$$= 0$$

$$\widetilde{H}_{2n}(CP^n) = \widetilde{H}_{2n}(CP^{n-1}) \oplus \mathrm{Ker}(\pi_{n-1})_*$$

$$= \mathrm{Ker}(\pi_{n-1})_* = \widetilde{H}_{2n-1}(S^{2n-1}) = Z.$$

所以 $$\widetilde{H}_q(CP^n) = \begin{cases} Z, & q = 0,2,\cdots,2(n-1),2n, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

习 题

1. 设 $n>0, k\in Z$，求证存在 $f: S^n\to S^n$，使 $\deg(f)=k$.

2. 设 $f,g: S^n\to S^n$，$a: S^n\to S^n$ 为对径映射，求证若对 $\forall x\in S^n$，$f(x)\neq g(x)$，则

$$g \simeq af.$$

3. 证明 S^{2n} 上没有处处非 0 的切向量场.

4. 设 $A,B\subset S^n$，$n\geqslant 2$，A,B 是连通子集，$A\cup B=S^n$，试证 $A\cap B$ 连通.

5. 求证任何映射 $f: S^{2n}\to S^{2n}$ 或者有一不动点，或者把一个点映成它的对径点.

6. 若二映射 $f,g: S^n\to S^n$ 满足 $|\deg(f)|\neq|\deg(g)|$，求证必 $\exists x\in S^n$，使 $f(x)\cdot g(x)=0$.

7. 设 X 紧，Y Hausdorff，$A\subset X$，$B\subset Y$ 均闭，设 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 映 $\overline{A}$ 一一地成 $\overline{B}$，求证 $X\cup_{f|A}B=Y$.

8. 据闭曲面的拓扑分类，求闭曲面的同调群.

9. 设 $A\subset \boldsymbol{R}^n$ 同胚于 $\boldsymbol{R}^{n-1}$，求证 $\boldsymbol{R}^n\setminus A$ 恰有两个分支.

10. 用 Brouwer 区域不变性定理证明 $\boldsymbol{R}^n\cong\boldsymbol{R}^m\Leftrightarrow m=n$.

11. 证明 S^n 没有真子集同胚于 S^n.

12. 证明若 $m>n$，则 S^n 没有真子集同胚于 I^m.

13. 证明连续映射 $f: S^n\to\boldsymbol{R}^n$ 不可能是一一的.

6.6 任意系数的同调群与相对同调群

到目前为止,我们只对链群为自由 Abel 群的链复形定义了同调群,更具体地,对拓扑空间 X,链群 $S_q(X)$ 的每一元素是形式线性组合 $\sum k_i\sigma_i^q$,其中 $k_i \in Z$,而 σ_i^q 为 q 维奇异单形. 现在试想,若将上述整数加群 Z 换成一般的 Abel 群 G,并令 $S(X,G) = \{S_q(X,G)\}$,其中 $S_q(X,G)$ 的元素是形式组性组合 $\sum g_i\sigma_i^q$,$g_i \in G$,那么 $S(X,G)$ 是否也可成为一链复形,从而有相应的同调群呢?为此,我们先有:

6.6.1 定义 设 A,B 为二 Abel 群,则 A 与 B 的**张量积**是由以下生成元组和关系组的 Abel 群:

生成元组 $=\{a\otimes b; a\in A, b\in B\}$,

关系组 $=\{(a_1+a_2)\otimes b_1 - a_1\otimes b_1 - a_2\otimes b_1$ 或 $a_1\otimes(b_1+b_2) - a_1\otimes b_1 - a_1\otimes b_2; a_i\in A, b_i\in B\}$.

关于二 Abel 群的张量积运算,有如下常用性质和运算规律:

6.6.2 命题 (1) 对 $\forall$ Abel 群 G, $G\otimes Z\cong G$;

(2) 对 $\forall p,q\in Z$, $Z_p\otimes Z_q\cong Z_{(p,q)}$;

(3) 设 Q 为有理数域,则 $Z_p\otimes Q=0$.

证明 由张量积的定义即得. ■

6.6.3 命题 同态 $f: A\to A'$, $g: B\to B'$,导出一同态

$$f\otimes g: A\otimes B\to A'\otimes B';$$

且若 $f': A'\to A''$, $g': B'\to B''$为另一对同态,则有

$$(f'\otimes g')(f\otimes g) = (f'f)\otimes(g'g).$$

事实上,$f\otimes g$ 的定义是显然的,且易验证 $f\otimes g$ 在 $A\otimes B$ 关系

组成员上的零映射，因此 $f\otimes g$ 为同态．而命题的第二结论直接验证即得．

6.6.4 命题 （1） $A\otimes B\cong B\otimes A$；

（2）若 $A=\bigoplus_i A_i$，$B=\bigoplus_j B_j$，则

$$A\otimes B\cong\bigoplus_{i,j}A_i\otimes B_j.$$

证明 （1）是显然的，而（2）仅是普通的验证工作，请读者自己作为练习完成． ■

下面我们将应用张量积运算去得到新的链复形．

6.6.5 命题 设有链复形 $C=\{C_q,\partial_q\}$，则对 $\forall$ Abel 群 G，$C\otimes G:=\{C_q\otimes G,\partial_n\otimes 1\}$ 也是链复形；且若 $f:C\to D$ 是链映射，则

$$f\otimes 1:C\otimes G\to D\otimes G$$

也是链映射．

证明 本节习题 1． ■

6.6.6 定义 设 $S(X)=\{S_q(X),\partial_q\}$ 为空间 X 的奇异链复形，则

$$S(X;G):=S(X)\otimes G$$

也是链复形，称 $S(X;G)$ 的同调群

$$H_q(X;G):=H_q(S(X;G))$$

为拓扑空间 X 的**以 G 为系数群的同调群**；同样，称

$$\widetilde{H}_q(X;G):=\widetilde{H}_q(\widetilde{S}(X)\otimes G)$$

为 X 的**以 G 为系数群的简约同调群**．

从连续映射 $f:X\to Y$，我们可得到链映射

$$f_\#\otimes 1:S(X)\otimes G\to S(Y)\otimes G,$$

从而有同态

$$f_* : H_n(X;G) \to H_n(Y;G).$$

同前面有关命题的证明类似，我们仍有：

若 $$g : Y \to Z,$$

则 $$(gf)_* = g_* f_* ; I_* = I ;$$

若 $$f \simeq g : X \to Y,$$

则 $$f_* = g_* ,$$

从而 $H_n(X;G)$也是伦型不变量.

关于任意系数的同调群与整系数同调群间的关系，由于其论证比较复杂，这里我们只给出一个一般性的结论，欲了解其证明的读者，可参阅参考文献[1].

一 Abel 群 G 的一个**自由分解**是指一短正合列：

$$0 \to G_1 \xrightarrow{j} G_0 \xrightarrow{\tau} G \to 0,$$

其中 G_1 和 G_0 均为自由 Abel 群. 可以证明，对任一 Abel 群 D，序列

$$G_1 \otimes D \xrightarrow{j \otimes 1} G_0 \otimes D \xrightarrow{\tau \times 1} G \otimes D \to 0$$

依然保持正合性，规定

$$\mathrm{Tor}(G,D) := \mathrm{Ker}(j \otimes 1),$$

可以证明(本节习题 2)，$\mathrm{Tor}(G,D)$与 G 的自由分解的选取无关.

6.6.7 定理(同调群的万有系数定理) 对 $\forall$ Abel 群 G，

$$H_n(X;G) \cong H_n(X) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X),G).$$

本节的第二个专题，我们想简述一下有关相对同调的基本结果，其中这些结果的证明，可仿照前面同调论的相应结果的证明去完成，我们把它们作为练习附于节后，读者可尝试作一下.

6.6.8 定义 设 $A \subset X$ 为子空间，则相对奇异链复形 $S(X,A) = \{S_n(X,A), \bar{\partial}_n\}$定义为：

$$S_n(X,A) := S_n(X)/S_n(A),$$

而$\bar{\partial}_n$ 是由∂_n 诱导的同态. 称 $S(X,A)$的同调群 $H_n(S(X,A))$为 X 相对于 A **的相对奇异同调群**,记作

$$H_n(X,A) := H_n(S(X,A)).$$

关于相对同调群,我们有如下结论:

6.6.9 定理 设 $A\subset X$,则∃长正合列

$$\cdots\to H_n(A)\xrightarrow{i_*}H_n(X)\xrightarrow{j_*}H_n(X,A)\xrightarrow{\partial_*}H_{n-1}(A)\to\cdots.$$

事实上,由于有短正合列

$$0\to S(A)\to S(X)\to S(X,A)\to 0,$$

再利用定理 6.4.2 即得要证结论.

6.7.10 定理(相对同调序列的自然性)设有映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$,则有相对同调群的长正合列及可换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\to & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \to\cdots \\
 & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\
\cdots\to & H_n(B) & \xrightarrow{i'_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j'_*} & H_n(Y,B) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{n-1}(B) & \to\cdots.
\end{array}$$

证明 由定理 6.6.9 和定理 6.4.2 立即可得. ■

设 $f,g:(X,A)\to(Y,B)$,若∃连接 f,g 的同伦

$$F:(X\times I,A\times I)\to(Y,B),$$

则称 f 与 g 是同伦的,记作

$$f\simeq g:(X,A)\to(Y,B).$$

6.6.11 定理 若

$$f\simeq g:(X,A)\to(Y,B),$$

则 $$f_*=g_*:H_n(X,A)\to H_n(Y,B);$$

特别地,若 $$(X,A)\simeq(Y,B),$$

则 $$H_n(X,A)\cong H_n(Y,B).$$

证明 本节习题4. ■

6.6.12 定理(切除定理) 设 $W\subset A\subset X$,且 $\overline{W}\subset \mathrm{Int}A$,则含入

$$i:(X\backslash W,A\backslash W)\to(X,A)$$

诱导了相对同调群间的同构:

$$i_*:H_n(X\backslash W,A\backslash W)\cong H_n(X,A).$$

等价地,我们有

6.6.13 定理 设 $X_1\cup X_2=X$,且 $\mathrm{Int}X_1\cup\mathrm{Int}X_2=X$,

则 $$i_*:H_n(X_1,X_1\cap X_2)\cong H_n(X,X_2).$$

证明 本节习题8. ■

习 题

1. 证明命题6.6.5.

2. 求证

(a) $\mathrm{Tor}(A,B)=\mathrm{Tor}(B,A)$;

(b) 若 A 是自由 Abel 的,则 $\mathrm{Tor}(A,B)=0$;

(c) $\mathrm{Tor}(A,B)$与 A 的自由分解的选取无关.

3. 求 $H_n(P^2,Z_2)$和 $H_n(P^3,Z_2)$.

4. 证明定理6.6.11.

5. 对任意空间偶(X,A),求证

(a) $i_*:H_n(A)\cong H_n(X)$,对 $\forall n\in Z\Leftrightarrow H_n(X,A)=0$;

(b) 当 $q<n$ 时,$H_q(X,A)=0\Leftrightarrow i_*:H_q(A)\to H_q(X)$ 当 $q<n$ 时是同构,而当 $q=n$ 时是满同态.

6. 设 $B\subset A\subset X$,且 A 是 X 的收缩核,求证对 $\forall n\in Z$, $H_n(X,B)\cong H_n(X,A)\oplus H_n(A,B)$.

7. 设 $i:A\to X$ 为含入,且 X 可形变到 A,即$\exists$同伦 $F:X\times I$

$\to X$，使 $F(x,0)=x, F(x,1)\in A(\forall x\in X)$，则有可裂的短正合列

$$0\to H_{n+1}(X,A)\xrightarrow{\partial_*}H_n(A)\xrightarrow{i_*}H_n(X)\to 0,$$

且
$$H_n(A)\cong H_{n+1}(X,A)\oplus H_n(X),\quad \forall n\in Z.$$

8. 证明定理 6.6.12 和定理 6.6.13.

第7章　上同调论

前面我们已对每一拓扑空间 X，有相应的 Abel 群列，这些 Abel群我们称为空间 X 的同调群. 这种对应关系的建立，为我们研究拓扑空间的性质，提供了很好的工具. 但为丰富研究拓扑空间的手段和方法，本章我们打算对每一拓扑空间 X，再引入一种新的 Abel 群列——上同调群列. 这种群列最初仅是代数学的对象，且当时它不像同调群那样，有更直观的几何背景，所以直到 20 世纪 30 年代，随着 Lefschetz 给流形对偶定理以简明的公式化描述，拓扑空间的上同调理论，才被拓扑学家们所重视. 经过深入研究后人们发现，上同调理论，由于可赋予其更丰富的代数结构，不但对拓扑学本身有重要意义，而且在沟通拓扑学与微分几何及分析的联系方面，发挥基础性作用. 这一章我们只打算对上周调的基本理论，作一概述，有意了解其应用的读者，可参考文献[1]—[3]中的有关章节.

7.1　Hom 函　子

7.1.1　定义　设 A,G 是二 Abel 群，则 A 到 G 的所有同态的集合

$$\mathrm{Hom}(A,G):=\{f\in G^A; f: A\to G \text{ 为同态}\}$$

在"加法"$(f+g)(a)=f(a)+g(a)$下，构成一 Abel 群，称其为从 A 到 G 的**同态群**.

7.1.2　定义　设 $\theta: A\to B$ 是 Abel 群同态，则 θ 的**对偶同态**

$$\theta^{\#}: \mathrm{Hom}(B,G) \to \mathrm{Hom}(A,G)$$

由 $\theta^{\#}(f) := f\theta$ 定义.

注 不难验证,对固定的 Abel 群 G,对应

$$A \to \mathrm{Hom}(A,G), \theta \to \theta^{\#}$$

定义了一个从 Abel 群及其同态范畴到其自身的一个反变函子,称其为 **Hom 函子**. 另外,我们还可证明 Hom 函子有如下一些基本性质:

7.1.3 命题 设 $\theta: A \to B$ 是一同态,而 $\theta^{\#}: \mathrm{Hom}(B,G) \to \mathrm{Hom}(A,G)$ 是其对偶同态,则

(1) 若 θ 是同构,则 $\theta^{\#}$ 亦是同构;

(2) 若 $\theta=0$,则 $\theta^{\#}=0$;

(3) 若 θ 满,则 $\theta^{\#}$ 单,即 $A \xrightarrow{\theta} B \to 0$ 的正合性蕴含 $\mathrm{Hom}(A,G) \xleftarrow{\theta^{\#}} \mathrm{Hom}(B,G) \leftarrow 0$ 的正合性.

证明 直接验证即可.

关于对偶同态,我们还有下面更一般的结果:

7.1.4 命题 若序列

$$A \xrightarrow{\theta} B \xrightarrow{\varphi} C \to 0$$

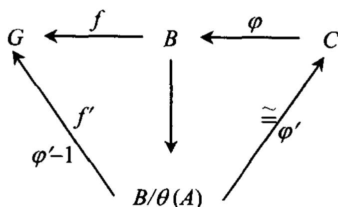
正合,则对偶序列

$$\mathrm{Hom}(A,G) \xleftarrow{\theta^{\#}} \mathrm{Hom}(B,G) \xleftarrow{\varphi^{\#}} \mathrm{Hom}(C,G) \leftarrow 0$$

亦正合. 更进一步地,若 θ 单且前一序列可裂,则 $\theta^{\#}$ 满且后一序列亦可裂.

证明 由命题 7.1.3,$\varphi^{\#}$ 是单的. 其次我们验证在 $\mathrm{Hom}(B,G)$ 处的正合性. 因 $h=\varphi\theta$ 是零同态,所以 $h^{\#}=\theta^{\#}\varphi^{\#}$ 也是零同态. 另一方面,若 $\theta^{\#}(f)=0$,我们需证 $f=\varphi^{\#}(g)$,对某 $g\in \mathrm{Hom}(C,G)$. 因 $\theta^{\#}(f)=f\theta=0$,则 f 在 $\theta(A)\subset B$ 上为零,从而 f 诱导了一同态 $f': B/\theta(A) \to G$. 而前一序列的正合性意味着 φ 诱导一同构

$\varphi' : G/\theta(A) \to C$，即有下图



7.1.1

注意　$g := f'\varphi'^{-1} \in \mathrm{Hom}(C,G)$，且

$$\varphi^{\#}(g) = g\varphi = f'\varphi'^{-1}\varphi = f.$$

现假设 θ 单地映 A 到 B 的一直加项上，且设 $\pi : B \to A$ 是满足 $\pi\theta = I_A$ 的同态，则 $\theta^{\#}\pi^{\#} = I_{\mathrm{Hom}(A,G)}$，从而 $\theta^{\#}$ 满，且 $\pi^{\#} : \mathrm{Hom}(A,G) \to \mathrm{Hom}(B,G)$ 满足 $\theta^{\#}\pi^{\#} = I_{\mathrm{Hom}(A,G)}$，使得第一序列可裂. ■

7.1.5　命题　(1) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha A_\alpha, G) \cong \prod_\alpha \mathrm{Hom}(A_\alpha, G)$，

$\mathrm{Hom}(A, \prod_\alpha G_\alpha) \cong \prod_\alpha \mathrm{Hom}(A, G_\alpha)$；

(2) $\mathrm{Hom}(Z,G) \cong G$，且若 $\theta : Z \to Z$ 是 m 倍映射，则 $\theta^{\#} : \mathrm{Hom}(Z,G) \to \mathrm{Hom}(Z,G)$ 亦是 m 倍映射；

(3) $\mathrm{Hom}(Z_m, G) \cong \mathrm{Ker}(G \xrightarrow{m} G)$.

证明　(1) 对任意 $f \in \mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha A_\alpha, G)$，记 $f_\alpha = f | A_\alpha$，且令 $\varphi(f) := \prod_\alpha f_\alpha$，则可以证明 $\varphi : \mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha A_\alpha, G) \to \prod_\alpha \mathrm{Hom}(A_\alpha, G)$ 为同构；另外对任意 $f \in \mathrm{Hom}(A, \prod_\alpha G_\alpha)$，令 $f_\alpha := \pi_\alpha f \in \mathrm{Hom}(A. G_\alpha)$，且令 $\varphi(f) = \prod_\alpha f_\alpha$，则可以证明 $\varphi : \mathrm{Hom}(A, \prod_\alpha G_\alpha) \to \prod_\alpha \mathrm{Hom}(A, G_\alpha)$ 为同构.

(2) 对任意 $\lambda \in \mathrm{Hom}(Z,G)$，令 $\varphi(\lambda) := \lambda(1) \in G$，则可以证明 $\varphi : \mathrm{Hom}(Z,G) \to G$ 为同构；另外，若 $\theta: Z \to Z$ 是 m 倍映射，则

$$\theta^{\#}(f)(x) = f\theta(x) = f(mx) = mf(x),$$

即 $\theta^{\#}(f) = mf$. 同时，在同构 φ 之下，$\theta^{\#}$ 对应于 G 到自身的一 m

倍同态.

(3) 由于序列

$$0 \to Z \xrightarrow{m} Z \to Z_m \to 0$$

的正合性,所以由命题 7.1.4,序列

$$\mathrm{Hom}(Z,G) \xleftarrow{m} \mathrm{Hom}(Z,G) \leftarrow \mathrm{Hom}(Z_m,G) \leftarrow 0$$

是正合的,且

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(Z_m,G) &\cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(Z,G) \xrightarrow{m} \mathrm{Hom}(Z,G)) \\ &\cong \mathrm{Ker}(G \xrightarrow{m} G).\end{aligned}$$

■

注 由于任意有限生成的 Abel 群 A,均可作如下直和分解:

$$A \cong mZ \oplus Z_{n_1} \oplus Z_{n_2} \oplus \cdots \oplus Z_{n_k},$$

所以,由上述定理

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A,G) &\cong \mathrm{Hom}\underbrace{(Z,G) \times \cdots \times \mathrm{Hom}(Z,G)}_{m\text{个}} \\ &\quad \times \mathrm{Hom}(Z_{n_1},G) \times \cdots \times \mathrm{Hom}(Z_{n_k},G) \\ &\cong \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{m\text{个}} \times \mathrm{Ker}(G \xrightarrow{n_1} G) \times \cdots \\ &\quad \times \mathrm{Ker}(G \xrightarrow{n_k} G).\end{aligned}$$

习　题

1. 证明若 T 是 G 的挠子群,则 $\mathrm{Hom}(G,Z) \cong \mathrm{Hom}(G/T,Z)$.

2. 证明若 A 是秩等于 n 的自由 Abel 群,则

$$\mathrm{Hom}(A,G) \cong \underbrace{G \oplus G \oplus \cdots \oplus G}_{n\text{个}}.$$

3. 对指定的二 Abel 群同态 $f: A \to A', g: G' \to G$,定义映射

$$\mathrm{Hom}(f,g): \mathrm{Hom}(A',G') \to \mathrm{Hom}(A,G)$$

为

$$\mathrm{Hom}(f,g)(\theta') = g\theta' f.$$

试验证

$$(A,G) \to \mathrm{Hom}(A,G)$$

和

$$(f,g): (A,G') \to (A',G) \to \mathrm{Hom}(f,g): \mathrm{Hom}(A',G') \to \mathrm{Hom}(A,G)$$

是一个函子.

4. 设 A 固定,则对下述从 Abel 群及其同态范畴到其自身的函子

$$G \to \mathrm{Hom}(A,G) \text{ 和 } f \to \mathrm{Hom}(I_A, f).$$

(1) 证明这函子保持短序列

$$0 \to G_1 \to G_2 \to G_3$$

的正合性;

(2) 证明这函子保持短正合列的可裂性.

7.2 单纯上同调

这一节我们打算给出单纯复形的上同调群的定义,然后具体计算一些简单可剖空间的上同调群.

7.2.1 定义 设 K 是单纯复形,G 是 Abel 群,则 K 的以 G 为系数群的 q 维**上链群**规定为

$$C^q(K;G) := \mathrm{Hom}(C_q(K),G),$$

其元素称为 K 的 q 维**上链**,而**上边缘算子**(或**上边缘同态**)δ 定义为边缘算子

$$\partial: C_{q+1}(K) \to C_q(K)$$

的对偶,即

$$\delta: C^q(K;G) \to C^{q+1}(K;G).$$

我们还定义 $Z^q(K;G)$是上述映射的核,而 $B^{q+1}(K;G)$是其像集,商群

$$H^q(K;G) := Z^q(K;G)/B^q(K;G)$$

(注意:$\partial^2=0$ 意味着 $\delta^2=0$)分别称为复形 K 的以 G 为系数群的 q

维闭上链群，$q+1$ 维**上边缘链群**和 q 维**上同调群**，它们的元素分别称为 K 的 q 维**上闭链**，$q+1$ 维**上边缘链**和 q 维**上同调类**.

注 (1) 当 Abel 群 G 是整数加群时，我们常将上述记号中的 G 省去.

(2) 若 c^q 是一 q 维上链，而 c_q 是一 q 维链，我们常常用记号 $\langle c^q, c_q\rangle$ 表示 c^q 在 c_q 处的值. 由于

$$\langle \delta c^q, c_{q+1}\rangle = \langle c^q, \partial c_{q+1}\rangle$$

所以上述记号在作上边缘运算时，比用普通的函数记号 $c^q(c_q)$ 要方便得多.

为方便地进行上边缘运算，我们现给出上链元素 $c^q \in \mathrm{Hom}(C_q(K), G)$ 的一种直和表示形式.

由于 $C_q(K)$ 是以 K 的 q 维有向单形所对应的 q 维链作为基的自由 Abel 群，所以若令 $\{\sigma_\alpha^q\}$ 是基本组中 q 维有向单形集，则 $C_q(K)$ 的任一元素应是 q 维链 σ_α^q 的线性组合 $\sum n_\alpha \sigma_\alpha^q$. 现在 $\mathrm{Hom}(C_q(K), G)$ 的每一元素 c^q 被它在每一基元素 σ_α^q 上的值 g_α 所决定.

若设 $\sigma_\alpha^{q*} \in \mathrm{Hom}(C_q(K), Z)$ 是在基元素 σ_α^q 上取 1，而在其余基元素上取 0 的上链，则当 $g \in G$ 时，我们则用 $g\sigma_\alpha^{g*} \in \mathrm{Hom}(C_q(K), G)$ 表示在基元素 σ_α^q 上取 g，而在其余基元素上取 0 的上链. 应用这种记号，我们常将上链 c^q 表示为一个(有限)形式和

$$c^q = \sum g_\alpha \sigma_\alpha^{q*} \qquad (*)$$

由于 $c_q(K) = \bigoplus\limits_\alpha C_\alpha$，其中 C_α 是由 σ_α^q 生成的无限循环群，所以

$$C^q(K;G) = \mathrm{Hom}(C_q(K), G) = \mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha C_\alpha, G)$$

$$\cong \prod_\alpha \mathrm{Hom}(C_\alpha, G) (\cong \prod_\alpha G).$$

在上述同构下，上链 $c^q \in C^q(K;G)$ 对应于直积元素 $(g_\alpha \sigma_\alpha^{q*})$，这种直积元素我们改用形式和 $\sum g_\alpha \sigma_\alpha^{q*}$ 表示，所以表示式$(*)$是合理的.

(*)表示式对计算上边缘算子是极其方便的. 因为我们可以证明:

7.2.2 命题 若 $c^q = \sum g_\alpha \sigma_\alpha^{q*}$, 则

$$\delta c^q = \sum g_\alpha (\delta \sigma_\alpha^{q*}). \qquad (**)$$

事实上, 对 K 的任一 $q+1$ 维有向单形 τ, 令

$$\partial \tau = \sum_{i=0}^{q+1} \varepsilon_i \sigma_{\alpha_i}^q,$$

其中 $\varepsilon_i = \pm 1$, 所以

$$\langle \delta c^q, \tau \rangle = \langle c^q, \partial \tau \rangle = \sum_{i=0}^{q+1} \varepsilon_i \langle c^q, \sigma_{\alpha_i}^q \rangle$$

$$= \sum_{i=0}^{q+1} \varepsilon_i g_{\alpha_i}.$$

另一方面

$$\langle g_\alpha (\delta \sigma_\alpha^{q*}), \tau \rangle = g_\alpha \langle \delta \sigma_\alpha^{q*}, \tau \rangle = g_\alpha \langle \sigma_\alpha^{q*}, \partial \tau \rangle$$

$$= \begin{cases} \varepsilon_i g_{\alpha_i} & \text{当 } \alpha = \alpha_i, i = 0, 1, \cdots, q+1 \text{ 时}, \\ 0 & \text{否则}. \end{cases}$$

因此 δc^q 与 $\sum g_\alpha (\delta \sigma_\alpha^{q*})$ 在 τ 上有相同的值, 即命题成立.

由上述命题, 我们要计算 δc^q, 只需对每一定向 q 维单形 σ^q, 计算 $\delta \sigma^{q*}$ 即可, 而又不难验证

$$\delta \sigma^{q*} = \sum \varepsilon_j \tau_j^{q+1*} \qquad (***)$$

其中和式取遍所有以 σ^q 作为其一个面的 $q+1$ 维单形 τ_j^{q+1}, 而 ε_j 正是关联系数 $[\tau_j^{q+1} : \sigma^q]$.

下面我们仅给出应用上述公式的简单例子, 而一般上同调群的计算问题, 留待以后展开讨论.

例 1 考虑如图 7.2.1 所示的复形 K, 其中 0 维单形集 $\{v_j\}$, 1 维单形集 $\{e_j\}$ 和 2 维单形集 $\{\sigma_j\}$ 及其定向, 如图中所示, 则由公式(***)

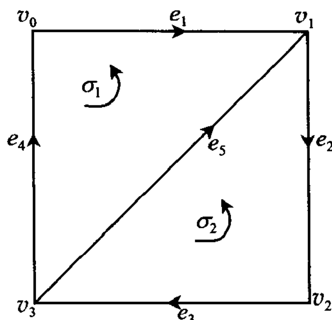


图 7.2.1

$$\delta e_5^* = \sigma_1^* - \sigma_2^*.$$

类似地

$$\delta v_1^* = e_1^* + e_5^* - e_2^*.$$

另外，由于 K 没有 3 维单形，所以 σ_1^* 和 σ_2^* 均为上闭链，且其实

$$\sigma_1^* = -\delta e_1^*, \sigma_2^* = -\delta e_3^* = -\delta e_2^*.$$

最后，我们还可验证 1 维上链

$$c^1 = e_1^* + e_5^* - e_3^*$$

也是闭的，且其实它等于 $\delta(v_1^* + v_2^*)$；而 0 维上链

$$c^0 = v_0^* + v_1^* + v_2^* + v_3^*$$

同样是闭的，但其不是上边缘链，因 K 没有 -1 维上链.

例 2 考虑如图 7.2.2 所示的环面 T^2 的单纯剖分 K（注意：这里给出的 T^2 的单纯剖分与 1.3 节图 1.3.3 略有不同）.

不难验证 K 的 1 维上链

$$c^1 = e_1^* + e_2^* + e_3^* + e_4^* + e_5^* + e_6^*,$$

$$d^1 = e_7^* + e_8^* + e_9^* + e_{10}^* + e_{11}^* + e_{12}^*$$

均是闭的，且因 $\delta(c^* + f^* + g^*) = c^1 - d^1$. 所以它们还是上同调的. 后面我们将会看到，$c^1$ 所代表的上同调类正是 $H^1(T^2)$ 的一个生成元.

例 3 考虑如图 7.2.3 所示的复形 K，我们今来计算它的上同调群.

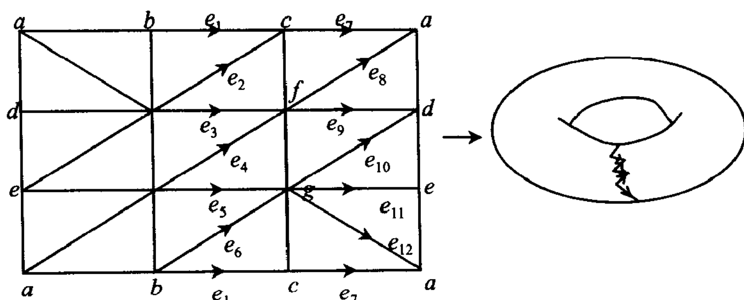


图 7.2.2

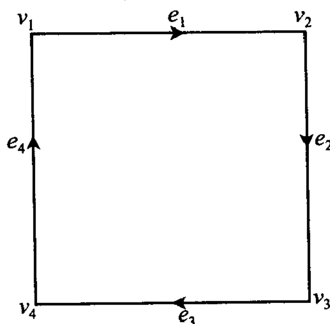


图 7.2.3

由(*),K 的任一 0 维上链可表为 $c^0=\sum n_i v_i^*$,而

$$\langle \delta c^0, e_i\rangle = \langle c^0, \partial e_i\rangle$$

$$= \langle c^0, v_{i+1}-v_i\rangle = n_{i+1}-n_i$$

$$(i=1,2,3,4, v_5\equiv v_1, n_5\equiv n_1),$$

所以

$$\delta c^0 = 0 \Leftrightarrow n_1=n_2=n_3=n_4 \Leftrightarrow c^0 = n\sum v_i^*,$$

从而 $H^0(K)\cong Z$,且以 $\sum v_i^*$ 为其一生成元.

又对 K 的任一 1 维上链 c^1,则其显然为上闭链,我们今证 c^1 上同调于 e_1^* 的倍数. 事实上,

$$\delta(v_1^*+v_2^*) = e_4^*-e_2^*,$$

$$\delta(v_2^* + v_3^*) = e_1^* - e_3^*,$$

$$\delta(v_1^* + v_2^* + v_3^*) = e_4^* - e_3^*.$$

再注意到,对 1 维闭链 $z=e_1+e_2+e_3+e_4$,$\langle ne_1^*, z\rangle = n$,所以当 $n\neq 0$ 时,ne_1^* 不是上边缘链,从而 $H^1(K)\cong Z$,且 e_1^* 所代表的上同调类是其一生成元.

注 若复形 K 是任意 n 边形,则可得同样的结论.

例 3 中复形 K 的同调群与上同调群是一致的,但这种情形不是总出现的.

例 4 考虑如图 7.2.4 所示的 Klein 瓶的一单纯剖分 K. 由 2.4 节的例 6,已知 $H_2(K)=0$,但我们可以证明 $H^2(K)$并非平凡群.

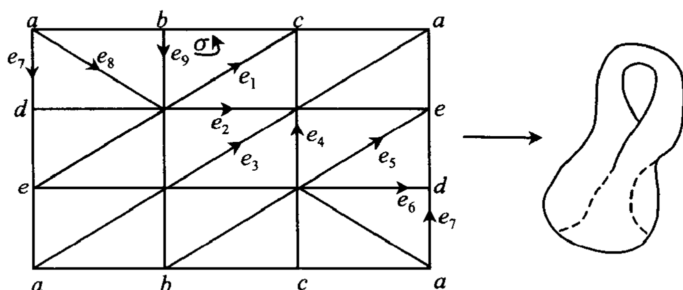


图 7.2.4

首先,对 K 的所有 2 维单形,给以逆时针定向,并令所有这些有向单形的和为 γ,则因$\partial\gamma=2z_1$,其中 $z_1 - ad+de+ea$,所以 γ 不是闭链.

其次,若设 σ 是 K 中的如图 7.2.4 所示的一有向 2 维单形,则显然 σ^* 是上闭链,但 σ^* 不是上边缘链,因为对任一上边缘链 δc^1,$\langle \delta c^1, \gamma\rangle = \langle c^1, \partial\gamma\rangle = 2\langle c^1, z_1\rangle$——偶数,而$\langle \sigma^*, \gamma\rangle = 1$. 因此 σ^* 所代表的上同调类是 $H^2(K)$的非平凡元素(事实上,σ^* 代表 $H^2(K)$的一个 2 阶元素,因为我们容易验证:$\delta(e_1^* + \cdots + e_9^*) = 2\sigma^*$).

在这一节的最后，我们打算考虑复形的 0 维上同调群，对此，我们有：

7.2.3 定理 复形 K 以 G 为系数群的 0 维上同调群 $H^0(K,G)$ 等于 K 的所有满足 $\langle c^0,v\rangle=\langle c^0,\omega\rangle$（其中 v,ω 属于 $|K|$ 的同一分支）的 0 维上链 c^0 构成的群；特别地，若 $|K|$ 连通，则 $H^0(K)\cong Z$，且其被在 K 的每一顶点处取值为 1 的上链生成.

证明 显然 $H^0(K;G)-Z^0(K;G)$. 若 v,ω 属于 $|K|$ 的同一分支，则 $\exists K$ 的 1 维链 c_1，使得 $\partial c_1=v-\omega$，从而对任一上闭链 c^0，有

$$0=\langle\delta c^0,c_1\rangle=\langle c^0,\partial c_1\rangle=\langle c^0,v\rangle-\langle c^0,\omega\rangle.$$

另外，若 c^0 是满足 $\langle c^0,v\rangle=\langle c^0,\omega\rangle$ 的上链（其中 v,ω 属于 $|K|$ 的同一分支），则对 K 的任一有向 1 维单形 σ，

$$\langle\delta c^0,\sigma\rangle=\langle c^0,\partial\sigma\rangle=0,$$

所以

$$\delta c^0=0. \qquad \blacksquare$$

注 上述定理表明，一般地 $H^0(K;G)$ 同构于若干个 G 的拷贝群的直积，这些拷贝群由 $|K|$ 的每一分支各提供一个而得到.

习 题

1. 求单点空间的上同调群 $H^q(pt;G)=?$

2. 对例 1 中的复形 K，求各维上闭链群的基，并证明 $H^q(K;G)-0\quad(q>0)$.

3. 对例 2 中的复形 K，验证如下等式

$$\delta c^1=\delta d^1=0,$$

且

$$\delta(c^*+f^*+g^*)=c^1-d^1.$$

4. 将区间 $[0,n]$ 用整数点单纯剖分，并记得到的复形为 K，求其上同调群.

5. 设 $K_0\subset K$ 是 K 的子复形，G 为 Abel 群，称

$$C^q(K,K_0;G):=\mathrm{Hom}(C_q(K,K_0),G)$$

为复形 K 模 K_0 的 q 维**相对上链群**(参考 2.2 节习题 7).

(1) 若记相对边缘 $\partial: C_{q+1}(K,K_0)\to C_q(K,K_0)$ 的对偶为 $\delta: C^q(K,K_0;G)\to C^{q+1}(K,K_0;G)$,求证 $\delta^2=0$,从而

$$Z^q(K,K_0;G):=\mathrm{Ker}(\delta: C^q(K,K_0;G)\to C^{q+1}(K,K_0;G))$$
$$\supset B^q(K,K_0;G):=\mathrm{Im}(\delta: C^{q-1}(K,K_0;G)\to C^q(K,K_0;G)).$$

称 $H^q(K,K_0;G):=Z^q(K,K_0;G)/B^q(K,K_0;G)$为复形 K 模 K_0 的以 G 为系数群的 q 维**相对上同调群**.

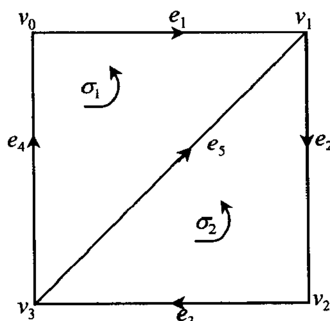


图 7.2.5

(2) 设 K 是正方形的单纯剖分,K_0 是其边界,如图 7.2.5 所示,求 $H^q(K,K_0)=?$

(3) 设 M 是Möbius带的单纯剖分,而 E 是对应于其边界的 M 的子复形,如图 7.2.6 所示,求 $H^q(M,E)=?$

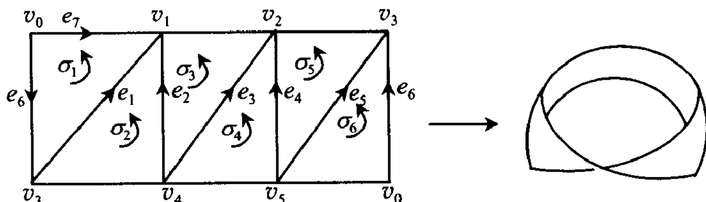


图 7.2.6

7.3 链复形的上同调

设$C=\{C_q,\partial_q\}$是一链复形，而G是一 Abel 群，我们定义C的以G为系数群的q维**上链群**为

$$C^q(C;G):=\mathrm{Hom}(C_q,G),$$

而把边缘算子∂的对偶δ称为**上边缘算子**. 由命题 7.1.3(2)，$\delta^2=0$，由此，我们称分次 Abel 群$\{C^q(C;G)\}$及其 1 阶上边缘算子$\{\delta: C^q(C;G)\to C^{q+1}(C;G)\}$构成的链复形

$$\cdots\leftarrow C^{q+1}(C;G)\xleftarrow{\delta}C^q(C;G)\xleftarrow{\delta}C^{q-1}(C;G)\leftarrow\cdots$$

为C的以G为系数群的**上链复形**.

记

$$Z^q(C;G):=\mathrm{Ker}(\delta: C^q(C;G)\to C^{q+1}(C;G)),$$

$$B^q(C;G):=\mathrm{Im}(\delta: C^{q-1}(C;G)\to C^q(C;G)).$$

则$B^q(C;G)\subset Z^q(C;G)$，称商群

$$H^q(C;G):=Z^q(C;G)/B^q(C;G)$$

为C的以G为系数群的q维**上同调群**.

不难看出，上节给出的复形K的以G为系数群的上同调群正是链复形$\{C_q(K),\partial\}$的以G为系数群的上同调群，即

$$H^q(K;G)=H^q(C;G),$$

其中

$$C=\{C_q(K),\partial\}.$$

而上节习题 5 给出的复形K模K_0的以G为系数群的相对上同调群，正是链复形$\{C_q(K,K_0),\partial\}$的上同调群，即

$$H^q(K,K_0;G)=H^q(C;G),$$

其中

$$C=\{C_q(K,K_0),\partial\}.$$

7.3.1 定义 设$C=\{C_q,\partial_q\}$，$C'=\{C'_q,\partial'_q\}$为二链复形，且假

设

$$f: C \to C'$$

为链映射，则对偶同态

$$C^q(C;G) \xleftarrow{f^\#} C^q(C';G)$$

与上边缘算子可换，称 $f^\#$ 为**上链映射**.

不难证明 $f^\#(Z^q(C';G)) \subset Z^q(C;G)$, $f^\#(B^q(C';G)) \subset B^q(C;G)$，从而 f 诱导一同态

$$f^*\ H^q(C';G) \to H^q(C;G).$$

另外，对应

$$C \to H^q(C;G), f \to f^*$$

是链复形及其链映射范畴到 Abel 群及其同态范畴的一个反变函子.

7.3.2 定义 设 $C=\{C_q, \partial_q\}$, $C'=\{C'_q, \partial'_q\}$ 为二链复形，$f,g: C \to C'$ 是二链映射，若设 $D: C_q \to C'_{q+1}$ 是连接 f 与 g 的链同伦，则称其对偶

$$D^\#: C^{q+1}(C';G) \to C^q(C;G)$$

为连接 $f^\#$ 与 $g^\#$ 的**上链同伦**.

不难证明，若 f 与 g 是链同伦的，则其上同调诱导同态 f^* 与 g^* 是相等的，另外，我们还可证明：

7.3.3 定理 设二链复形 $C=\{C_q, \partial_q\}$, $C'=\{C'_q, \partial'_q\}$ 是链等价的，其间的链等价设为 $\varphi: C \to C'$，则 $\varphi^*: H^q(C';G) \to H^q(C;G)$ 是一同构.

事实上，因 $\varphi: C \to C'$ 是链等价，所以有在链映射 $\psi: C' \to C$ 使得 $\varphi\psi$ 与 $\psi\varphi$ 均链同伦于恒等映射，从而 $\psi^\#\varphi^\#$ 与 $\varphi^\#\psi^\#$ 均上链同伦于恒等映射，亦即 $\psi^*\varphi^*$ 和 $\varphi^*\psi^*$ 分别等于 $H^q(C';G)$ 和 $H^q(C;G)$ 上的恒等同态.

最后，仿定理 6.4.2 的证明，我们还可得到如下上同调正合序列的自然性：

7.3.4 定理 设有二链复形短正合列的可换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\alpha} & & \downarrow{\beta} & & \downarrow{\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

且两短正合列在每一维数都是可裂的，则 ∃ 上同调长正合列的可换图

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots \longleftarrow & H^q(C;G) & \xleftarrow{f^*} & H^q(D;G) & \xleftarrow{g^*} & H^q(E;G) & \xleftarrow{\delta^*} & H^{q-1}(C;G) & \longleftarrow \cdots \\ & \uparrow{\alpha^*} & & \uparrow{\beta^*} & & \uparrow{\gamma^*} & & \uparrow{\alpha^*} & \\ \cdots \longleftarrow & H^q(C';G) & \xleftarrow{f'^*} & H^q(D';G) & \xleftarrow{g'^*} & H^q(E';G) & \xleftarrow{\delta'^*} & H^{q-1}(C';G) & \longleftarrow \cdots. \end{array}$$

习　　题

1. 设 C 为链复形，f 为链复形间的链映射，试给出对应

$$C \to H^q(C;G),\ f \to f^*$$

是链复形及其链映射范畴到 Abel 群及其同态范畴的一个反变函子的详细证明.

2. 证明　若二链映射 $f,g: C \to C'$ 是链同伦的，则其上同调诱导同态 f^* 与 g^* 是相等的.

3. 证明　本节定理 7.3.4.

7.4　奇异上同调

像同调理论一样，关于上同调论，我们除有单纯上同调外，也有奇异上同调，其根本目的都是一致的，即使我们的(上)同调理论

能应用于更广泛的拓扑空间.

7.4.1 定义 设 $A\subset X$ 为 X 的子空间,$S(X,A)$为相对奇异链复形,称

$$H^q(X,A;G):=H^q(S(X,A);G)$$

为拓扑空间 X 相对于 A 的 q 维**相对奇异上同调群**或(X,A)的 q 维**奇异上同调群**.

注

(1) 当 $A=\theta$ 时,称 $H^q(X;G):=H^q(X,\theta;G)$为拓扑空间 X 的系数取自 G 的 q 维**上同调群**;

(2) 像单纯上同调一样,当系数群 $G=Z$ 时,我们常将奇异上同调群记号 $H^q(X,A;G)$中的 G 省去.

7.4.2 定义 设 $\widetilde{S}(X)$是拓扑空间 X 的增广奇异链复形,称

$$\widetilde{H}^q(X;G):=H^q(\widetilde{S}(X);G)$$

为 X 的系数取自 G 的 q 维**简约奇异上同调群**.

关于简约奇异上同调群,有如下结论:

7.4.3 命题 对拓扑空间 X:

(1) 若 $\widetilde{H}_0(X)=0$,则 $\widetilde{H}^0(X;G)=0$;

(2) $H^0(X;G)\cong\widetilde{H}^0(X;G)\oplus G$.

证明 本节习题 1. ■

关于上同调群,它有很多与同调群类似的性质,以下我们将给出这些结论,但它们的证明多数与同调群类似性质的证明相仿,我们将把这些证明放在练习里,由读者自己完成.

7.4.4 定理 设 $f\simeq g:(X,A)\to(Y,B)$,则

$$f^*=g^*:H^q(Y,B;G)\to H^q(X,A;G),$$

从而若$(X,A)\simeq(Y,B)$,则

$$H^q(X,A;G) = H^q(Y,B;G).$$

证明 本节习题 2. ■

设 $A\subset X$ 为子空间，由于短正合列

$$0 \to S(A) \to S(X) \to S(X,A) \to 0$$

在每一维数都是可裂的（因 $S_q(X,A)$ 自由），所以由命题 7.1.4 及定理 6.4.2，有：

7.4.5 定理 对空间对 (X,A) 及 Abel 群 G，有长正合列

$$\cdots \leftarrow H^q(A;G) \leftarrow H^q(X;G) \leftarrow H^q(X,A;G) \xleftarrow{\delta^*} H^{q-1}(A;G) \leftarrow \cdots.$$

更一般地，设 $A\subset X'\subset X$，则我们还有：

7.4.6 定理 对于上述三元组及 Abel 群 G，有长正合列

$$\cdots \leftarrow H^q(X',A;G) \leftarrow H^q(X,A;G) \leftarrow H^q(X,X';G) \leftarrow H^{q-1}(X',A;G) \leftarrow \cdots.$$

另外，再由定理 7.3.4，我们还可得到相对上同调序列的自然性如下：

7.4.7 定理 设有空间对映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$，则有相对上同调群长正合列及可换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \leftarrow & H^q(A;G) & \leftarrow & H^q(X;G) & \leftarrow & H^q(X,A;G) & \xleftarrow{\delta^*} & H^{q-1}(A;G) & \leftarrow \cdots \\
& \uparrow f^* & & \uparrow f^* & & \uparrow f^* & & \uparrow f^* & \\
\cdots \leftarrow & H^q(B;G) & \leftarrow & H^q(Y;G) & \leftarrow & H^q(Y,B;G) & \xleftarrow{\delta'^*} & H^{q-1}(B;G) & \leftarrow \cdots.
\end{array}$$

类似于定理 6.4.5，我们还可得到关于上同调群的 Mayer-vietoris 序列：

7.4.8 定理 设 $U,V\subset X$，使得 $\mathrm{Int}U\cup\mathrm{Int}V=X$，则 $\exists$ 长正合

列

$$\cdots \leftarrow H^q(U\cap V;G) \leftarrow H^q(U;G)\oplus H^q(V;G) \leftarrow H^q(X;G)$$
$$\leftarrow H^{q-1}(U\cap V;G) \leftarrow \cdots.$$

关于上同调群的类似于推论 6.4.6、6.4.7 的结论及相对上调群的 Mayer-vietoris 序列，见本节习题 3,4,5.

为方便计算上同调群，本节的最后我们打算给出上同调论的切除定理，并表明上同调与同调的关系.

7.4.9 定理 设 $W\subset A\subset X$，且 $\overline{W}\subset \mathrm{Int}A$，则含入映射

$$i:(X\backslash W, A\backslash W)\to (X,A)$$

诱导一同构

$$i^*: H^q(X,A;G)\to H^q(X\backslash W, A\backslash W).$$

证明 由本节习题 6 及关于同调群的切除定理 6.6.12，

$$i_\#: S_q(X\backslash W, A\backslash W)\to S_q(X,A)$$

是一链同伦等价，从而

$$i^\#: S^q(X,A;G)\to S^q(X\backslash W, A\backslash W;G)$$

是一上链同伦等价. 因此

$$i^*\ H^q(X,A;G)\to H^q(X\backslash W, A\backslash W)$$

是一同构. ■

为讲清上同调与同调的关系，我们需先熟悉导出函子 Ext.

对 Abel 群 E 的一自由分解

$$0\to R\xrightarrow{\iota} F\xrightarrow{\pi} E\to 0,$$

则由命题 7.1.4，对任 Abel 群 G，对偶序列

$$\mathrm{Hom}(R,G)\xleftarrow{\iota^\#}\mathrm{Hom}(F,G)\xleftarrow{\pi^\#}\mathrm{Hom}(E,G)\leftarrow 0$$

依然正合. 定义

$$\mathrm{Ext}(E,G) := \mathrm{Coker}\,i^\# = \mathrm{Hom}(R,G)/\mathrm{Im}\,i^\#.$$

可以证明，导出函子 Ext 有如下基本性质：

7.4.10 命题 (1) 若 E 是自由 Abel 的，则 $\mathrm{Ext}(E,G)$ 平凡；

(2) $\mathrm{Ext}(E,G)$ 与 E 的自由分解的选取无关；

(3) $\mathrm{Ext}(E,G)$ 关于 E 是反变的，而关于 G 是协变的，即若 $f: E\to E', h: G\to G'$ 为 Abel 群同态，则 ∃ 诱导同态

$$f^*: \mathrm{Ext}(E',G)\to \mathrm{Ext}(E,G),$$
$$h_*: \mathrm{Ext}(E,G)\to \mathrm{Ext}(E,G');$$

(4) 若 $0\to A\xrightarrow{i} B\xrightarrow{k} C\to 0$ 为短正合列，则 ∃ 正合列

$$0\leftarrow \mathrm{Ext}(A,G)\xleftarrow{i^*}\mathrm{Ext}(B,G)\xleftarrow{k^*}\mathrm{Ext}(C,G)\leftarrow \mathrm{Hom}(A,G)$$
$$\xleftarrow{i^\#}\mathrm{Hom}(B,G)\xleftarrow{k^\#}\mathrm{Hom}(C,G)\leftarrow 0.$$

证明 本节习题 7. ■

下面的定理给出了同调与上同调间的基本关系，它可看成定理 6.6.7 在相对情形的对偶.

7.4.11 定理(上同调群的万有系数定理) 对空间对 (X,A) 及 Abel 群 G，有可裂的短正合列

$$0\to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X,A),G)\to H^n(X,A;G)\to \mathrm{Hom}(H_n(X,A),G)\to 0.$$

证明 本节习题 8. ■

习 题

1. 证明本节命题 7.4.3.
2. 证明本节定理 7.4.4.
3. 设 $\mathrm{Int}U\cup\mathrm{Int}V=X$，$\mathrm{Int}U'\cup\mathrm{Int}V'=X'$，且有映射 $f: X, U, V\to X', U', V'$，求证有下列长正合列的可换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\leftarrow H^q(U\cap V;G) & \xleftarrow{g^*} & H^q(U;G)\oplus H^q(V;G) & \xleftarrow{h^*} & H^q(X;G) & \xleftarrow{\partial^*} & H^{q-1}(U\cap V;G)\leftarrow\cdots \\
\uparrow f^* & & \uparrow f^* \quad \uparrow f^* & & \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\
\cdots\leftarrow H^q(U'\cap V';G) & \xleftarrow{g'^*} & H^q(U';G)\oplus H^q(V';G) & \xleftarrow{h'^*} & H^q(X';G) & \xleftarrow{\partial'^*} & H^{q-1}(U'\cap V';G)\leftarrow\cdots.
\end{array}$$

4. 设 $X_1, X_2 \subset X$ 闭，且 $X_1 \cup X_2 = X$，另外 $A = X_1 \cap X_2$ 是其某邻域的强形变收缩核，则有下列长正合列

$$\cdots \leftarrow H^q(A;G) \xleftarrow{g^*} H^q(X_1;G) \oplus H^q(X_2;G)$$
$$\xleftarrow{h^*} H^q(X;G) \xleftarrow{\partial^*} H^{q-1}(A;G) \leftarrow \cdots.$$

5. 给出相对上同调群的 Mayer-Vietoris 序列，并作证明.

6*. 设 $f: C \to D$ 是自由链复形间的一链映射，若 f 诱导同调群间的同构，求证 f 是一链同伦等价.

7. 证明本节命题 7.4.10.

8. 证明本节定理 7.4.11.

9*. 试利用定理 7.4.11 求闭曲面的上同调群（参考第 6 章第 5 节习题 8）.

常用符号及其意义

符号	意义
$\mathscr{U}$	拓扑
θ	空集
$(X,\mathscr{U})$	拓扑空间
$\in$	属于
$\subset$	含于
$\cup$	并
$\cap$	交
$\bar{Y}$	Y 的闭包
$f: X\to Y$	连续映射
$\cong$	同胚,同构
$\mathscr{U}_s$	诱导拓扑
S^n	n 维单位球面
$\boldsymbol{R}^n$	n 维欧氏空间
$\mathscr{U}_f$	商拓扑
$X/\sim$	集 X 上的等价类之集
$X\times Y$	集 X 与 Y 的笛卡儿积或拓扑空间 X 与 Y 的乘积空间
$\mathscr{U}_{X\times Y}$	积拓扑
$\underline{\sigma}^q$	q 维单形
$\langle a_0,a_1,\cdots,a_q\rangle$	以 $a_0,a_1,\cdots,a_q$ 为顶点的 q 维单形
$\underline{\triangle}^q$	标准 q 维单形
$f\mid X$	映射 f 在 X 上的限制
$\dim K$	复形 K 的维数
K^q	复形 K 的 q 维骨架

Cl $\underline{\sigma}^q$	单形$\underline{\sigma}^q$ 的闭包复形
Bd $\underline{\sigma}^q$	单形$\underline{\sigma}^q$ 的边缘复形
$\|K\|$	复形 K 的基础空间或多面体
(K,φ)	拓扑空间的单纯剖分或三角剖分
P^n	n 维实射影空间
CP^n	n 维复射影空间
σ^q	q 维有向单形
$a_0a_1\cdots a_q$	以 $a_0,a_1,\cdots,a_q$ 为顶点的 q 维有向单形
σ_i^{q-1}	σ^q 的第 i 个面
$[\sigma^q:\sigma^{q-1}]$	关联系数
∂	边缘算子或边缘同态
$\partial\sigma^q$	有向单形 σ^q 的边缘
∂X	集 X 的边界
$Z_q(K)$	复形 K 的 q 维闭链群
$B_q(K)$	复形 K 的 q 维边缘链群
$H_q(K)$	复形 K 的 q 维单纯同调群
$H_q(K,K_0)$	复形对(K,K_0)的 q 维相对单纯同调群
$[z_q]$	链 z_q 的同调类
$\chi(K)$	复形 K 的 Euler-Poincare 示性数
R_q	复形 K 的 q 维 Betti 数
Kerφ	同态 φ 的核
Cokerφ	同态 φ 的余核
$\oplus$	直和
Π	直积或笛卡儿积
T^2	2 维环面
Int$X$	集 X 的内部
$X_1 \# X_2$	拓扑空间 X_1 与 X_2 的连通和
$g(X)$	曲面 X 的亏格
$\simeq$	同伦,同伦等价

$\simeq$ rel	相对同伦
$\underset{p}{\simeq}$	定端同伦
$\alpha * \beta$	道路 α 与 β 的积
$\bar{\alpha}$	道路 α 的逆道路
$[\alpha]$	道路 α 所在的道路类
c_{x_0}	基点在 x_0 的常道路,或取值为 x_0 的常值映射
$\Omega(X,x_0)$	X 中以 x_0 为基点的闭路之集
$\pi_1(X,x_0)$	X 的以 x_0 为基点的基本群
$\pi_1(X)$	X 的基本群
f_*	映射 f 诱导的基本群或同调群同态
$\tilde{f}$	映射 f 的提升
$X_1 \vee X_2$	空间 X_1 与 X_2 的单点并
$\mathscr{C}$	范畴
$ob\mathscr{C}$	范畴 $\mathscr{C}$ 的对象集
$Mor_{\mathscr{C}}(X,Y)$	从对象 X 到 Y 的射集
V^*	线性空间 V^* 的对偶空间
$[X,Y]$	从 X 到 Y 映射的同伦类之集
$\{C_n,\partial_n\}$	链复形
$Z_n(C)$	链复形 C 的闭链群
$B_n(C)$	链复形 C 的边缘链群
$H_n(C)$	链复形 C 的同调群
$\{S_n(X),\partial_n\}$	空间 X 的奇异链复形
$Z_n(X)$	空间 X 的奇异闭链群
$B_n(X)$	空间 X 的边缘链群
$H_n(X)$	空间 X 的同调群
$\{\widetilde{S}_n(X),\widetilde{\partial}_n\}$	空间 X 的增广奇异链复形
$\widetilde{H}_n(X)$	空间 X 的简约奇异同调群
$f_\#$	映射 f 诱导的链映射

$[\pi,\pi]$	群 π 的换位子群
∂_*	联结同态
$\deg(f)$	映射 f 的 Brouwer 度
$\coprod$	不交并
$X\cup_f Y$	X 与 Y 通过映射 f 的粘贴空间
CX	空间 X 的锥形
X/A	把子空间 A 捏成一点而得的粘贴空间
$D^n\cup_f X$	贴胞腔 D^n 于 X
Cf	映射 f 的映射锥
ΣX	空间 X 的双角锥
$\otimes$	张量积
$H_n(X;G)$	空间 X 的以 G 为系数群的同调群
$H_n(X,A)$	空间对(X,A)的相对同调群
X^Y	从 Y 到 X 的所有映射之集
$\mathrm{Hom}(A,G)$	从群 A 到 G 的所有同态之集
$\theta^\#$	同态 θ 诱导的对偶同态
$C^q(K;G)$	复形 K 的以 G 为系数群的上链群
$Z^q(K;G)$	复形 K 的以 G 为系数群的上闭链群
$B^q(K;G)$	复形 K 的以 G 为系数群的上边缘链群
$H^q(K;G)$	复形 K 的以 G 为系数群的上同调群
$H^q(K,K_0;G)$	复形对(K,K_0)的以 G 为系数群的上同调群
$f^\#$	f 诱导的上链映射
f^*	f 诱导的上同调同态
$H^q(X,A;G)$	空间对(X,A)的相对奇异上同调群
$H^q(X;G)$	空间 X 的奇异上同调群
$\widetilde{H}^q(X;G)$	空间 X 的简约奇异上同调群

参考文献

[1] Vick, J. W., Homology Theory, Academic N. Y., 1973.

[2] Munkres, J. R., Elements of Algebraic Topology, Addison-Wesley, 1984.

[3] Greenberg, M. J., and Harper, J. R., Algebraic Topology, Benjamin/Cummings, 1981(有中译本).

[4] 林金坤. 拓扑学基础,北京:科学出版社,2000.

[5] Kelley, J. L., General Topology, Springer-Verlag, 1975(有中译本).

[6] 熊金城. 点集拓扑讲义,北京:人民教育出版社,1981.

主要名词索引

（以拼音为序）

[General Information]
□□=□□□□□□□
□□=□□□
□□=211
SS□=11540360
DX□=
□□□□=2005□02□□1□
□□□=□□□□□□□□□□□